Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 2

Esercizio 1. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi e H un sottogruppo di G. Si dimostri che $f^{-1}(f(H)) = H\mathrm{Ker}(f)$.

Esercizio 2. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi. Definiamo

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G \\ \text{contenenti Ker} f \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G' \\ \text{contenuti in } f(G) \end{array} \right\} \text{ con } \phi(H) = f(H).$$

Dimostrare che ϕ è invertibile. Inoltre supponendo che H e K siano due sottogruppi di G contenenti Ker$f$ verificare le seguenti proprietà di ϕ.

1. $H \leq K$ se e solo se $\phi(H) \leq \phi(K)$;
2. se $H \leq K$ allora $|K : H| = |\phi(K) : \phi(H)|$;
3. $H \triangleleft K$ se e solo se $\phi(H) \triangleleft \phi(K)$;
4. se $H \triangleleft K$ allora $K/H \cong \phi(K)/\phi(H)$;
5. H e K sono coniugati in G se e solo se $\phi(H)$ e $\phi(K)$ sono coniugati in $f(G)$.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che un gruppo in cui tutti gli elementi non banali hanno ordine 2 è abeliano.
2. Dimostrare che $\mathbb{D}_6 \cong S_3$.
3. Dimostrare che un gruppo non abeliano di ordine 6 è isomorfo a $\mathbb{D}_6$.

Esercizio 4. Sia G il gruppo dei numeri reali rispetto all'addizione e H il sottogruppo di G costituito dai numeri interi. Dimostrare che G/H è isomorfo al gruppo dei numeri complessi di modulo uno rispetto alla moltiplicazione.