Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

1.a prova

24 gennaio 1995

1) Provare, con il metodo di induzione, che vale, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2 - i) = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

2) Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da: $f(x) = 3x - 1$ e $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(y) = y^2 + 2y$. Verificare che l'applicazione composta $h = g \circ f$ è data da $h(t) = 9t^2 - 1$ e dire se è iniettiva e/o suriettiva.

3) Verificare, usando la definizione di limite, che vale:

$$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 + 1 = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{3n-2}{n+4} = 3.$$

4) Sia $A = \{3 + \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Provare che $\sup A = 7/2$ e che $\inf A = 3$. L'insieme A ha massimo? Ha minimo?

Istituzioni di Matematiche
per Scienze Geologiche

A.A. 1993/94

1ª prova

25 gennaio 1994

1) Dimostrare, con il metodo di induzione, che

$$3n^2 - 3n - 6$$

è sempre divisibile per sei per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2) Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = 4n^2 - 1$. Provare che f è iniettiva. Provare che f non è suriettiva.

3) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 7x - \sqrt{3}$. Provare che f è biiettiva. Trovare l'inversa di f.

4) Si trovino i vettori di $\mathbb{R}^2$ di lunghezza 5 e perpendicolari al vettore $(3, 4)$.

5) Verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+5}{2n^2} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

1.a prova

30 gennaio 1996

1) Provare, con il metodo di induzione, che vale:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3i = \frac{1}{3}n(n+1)(n-4).$$

2) Sia $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ un'applicazione. Scrivere cosa significa che f è invertibile. Sia poi in particolare $f(x) = 3x - 4$. Mostrare che tale f è invertibile.

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n + 2\sqrt{n}}{5n - 4\sqrt{n}}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n + \sin(n)}{n}$$

e verificare, usando la definizione, che vale:

$$\lim_{x\to 1}(7x - 5) = 2.$$

4) Risolvere la seguente disequazione:

$$|x + 7| > 4.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

1.a prova

20 gennaio 1997

1) Provare, *usando le definizioni*, che l'applicazione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = 2x - 11$ è iniettiva e suriettiva. Trovare l'inversa di f.

2) Verificare, usando la definizione di limite, che vale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-1}{n} = 4, \qquad \lim_{n\to+\infty} n - n^2 = -\infty.$$

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-7n^3}{2n-5n^3}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{4n+5\cos n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} 3n^2 - 7n.$$

4) Provare, con il metodo di induzione, che vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(3i^2 - i\right) = n^2(n+1).$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

1.a prova

16 gennaio 1998

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^6+4n^4-8n+1}{2n^6-5n+1},\qquad \lim_{n\to+\infty}4n^2+2\cos n+1,\qquad \lim_{n\to+\infty}3n^3-2n^2+1.$$

2) Verificare, usando la definizione di limite, che vale:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n}=3/2,\qquad \lim_{n\to+\infty}2n^2+n=+\infty.$$

3) Scrivere in forma trigonometrica il seguente numero complesso:

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}-i}$$

e calcolare z^5, z^6 e $1/z$.

4) Scrivere sotto forma di frazione il numero periodico: $0,2222\ldots$ e giustificare la risposta.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

4 aprile 1995

1) Si studi la seguente funzione e si tracci il suo grafico:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

2) Si calcolino le derivate della seguenti funzioni:

$$y = \log\big(\arctan(x^2 - 1)\big), \qquad y = e^{\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}, \qquad y = \cos(\sin(x - 3)).$$

3) Si dica quanti zeri ha la seguente funzione e si trovino degli intervalli (di ampiezza al massimo di una unità di misura) entro i quali cadono gli zeri:

$$f(x) = x^3 - 6x + 3.$$

Si giustifichi la risposta.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

25 marzo 1997

1) Della seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{x-2}\right).$$

determinare:
a) insieme dove è definita;
b) eventuali asintoti;
c) derivata;
d) crescenza, decrescenza ed eventuali massimi e minimi;
e) derivata seconda ed evetuali punti di flesso.
Usando infine tutte le precedenti risposte, tracciare un grafico della funzione.

2) Dato il numero complesso $z = 1 + i$, determinare:
a) il modulo e l'argomento di z;
b) la forma trigonometrica di z;
c) z^5 (usare il punto b)).

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{\sin^2(x-1)}.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

22 marzo 1994

1) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$y = \log\left(\frac{x^3+\cos(x)}{x-1}\right); \quad y = \arctan\left(\frac{x+\log(x^2-1)}{x^3}\right); \quad y = \sqrt{\frac{x^2-\sin(x)}{x}}.$$

2) Dire dove la funzione definita da:

$$f(x) = |x^3 - x|$$

è derivabile.

3) Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$y = -\frac{x^2+3x+2}{x-3}.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

22 marzo 1994

1) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$y = \log\left(\frac{x^3 + \cos(x)}{x-1}\right); \quad y = \arctan\left(\frac{x + \log(x^2-1)}{x^3}\right); \quad y = \sqrt{\frac{x^2 - \sin(x)}{x}}.$$

2) Dire dove la funzione definita da:

$$f(x) = |x^3 - x|$$

è derivabile.

3) Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 + 3x + 2}{3 - x}.$$

.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

18 marzo 1996

1) Provare, con il metodo di induzione, che vale:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3i = \frac{1}{3}n(n+1)(n-4).$$

2) Sia $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ un'applicazione. Scrivere cosa significa che f è invertibile. Sia poi in particolare $f(x) = 3x - 4$. Mostrare che tale f è invertibile.

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n + 2\sqrt{n}}{5n - 4\sqrt{n}}\,; \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n + \sin(n)}{n}$$

e verificare, usando la definizione, che vale:

$$\lim_{x \to 1} (7x - 5) = 2.$$

4) Risolvere la seguente disequazione:

$$|x + 7| > 4.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

18 marzo 1996

1) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$a)\ y = x\log(\cos^3 x + 3);$$

$$b)\ y = \frac{x^3 - e^x}{2x+1};$$

$$c)\ y = \arctan(x^3 + 4x^2);$$

$$d)\ y = \frac{\sqrt[3]{x^7} + 2\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[9]{x}}.$$

2) Dato il seguente numero complesso:

$$z = -4 + 4i\sqrt{3}$$

calcolare il suo modulo $|z|$, il suo argomento, trovare il suo reciproco in forma algebrica (cioè scrivere $1/z$ nella forma $a + ib$) e infine calcolare z^7.

3) Calcolare tutte le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^3 + z^2 + z = 0.$$

4) Dire in quali punti di $\mathbb{R}$ la funzione

$$y = |x + 7|$$

è derivabile e in quali punti è continua.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

2.a prova

13 marzo 1998

1) Studiare la seguete funzione:

$$y = \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

2) Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$. Calcolare $f'(1)$ usando *esclusivamente la definizione di derivata.*

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{2x-6}; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-11x+1}{4x^3-3x^2+9}.$$

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

3.a prova

15 maggio 1997

1) Data la funionze $f(x) = 2\sin(x) + \cos(2x)$, scrivere il polinomio di Taylor di $f(x)$ di grado 5 e con valore iniziale $x_0 = 0$. Stimare poi il resto $R_5(x)$ per tale funzione nell'intervallo $[0, 1]$.

2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x-12}{x^2+x-6}\,dx; \qquad \int \frac{x}{\cos(x)}\,dx; \qquad \int_0^1 \arctan(x)\,dx.$$

3) Calcolare l'inversa della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e risolvere poi con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ 2x + y + z & = & 4 \\ -x + y + 4z & = & 25 \end{cases}$$

Istituzioni di Matematiche
per Scienze Geologiche

A.A. 1993/94

3ª prova

13 maggio 1994

1) Sia A la matrice seguente:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si calcoli l'inversa A^{-1} di A e si verifichi che $AA^{-1} = I_4$.

2) Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx; \qquad \int \frac{9\log^2(x)}{x}\,dx; \qquad \int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[5]{x}}\,dx; \qquad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$$

3) Si scriva la formula di Taylor con il resto di Peano per la funzione $f(x) = e^x + x^2$, per $n = 5$ e valore iniziale $x_0 = 0$.

4) Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalle rette $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, e dalla curva $y = 1/x + x^3$.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

3.a prova

17 maggio 1995

1) Calcolare la formula di Taylor con $n = 5$ della funzione:

$$y = \sin x + 2\cos x$$

e trovare una maggiorazione per il resto $R_5(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$.

2) Calcolare i seguenti integrali indefiniti e verificare il risultato:

$$\int \frac{1 + x\sin^2 x \cos x}{x}\,dx; \qquad \int x^2 \cos x\,dx; \qquad \int x\sqrt{3 + 4x^2}\,dx.$$

3) Calcolare:

$$\int_0^2 x e^{2x^2}\,dx; \qquad \int_2^{+\infty} \frac{3 + x}{x^3}\,dx.$$

4) Calcolare l'inversa della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

e verificare il risultato trovato.

5) Risolvere il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

e verificare la soluzione trovata.

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Istituzioni di Matematiche

3.a prova

6 maggio 1996

1) Sia $f(x)$ la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2 - x^4}\right)$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Per quali valori di x è definita?
b) Ha delle simmetrie?
c) Esistono asintoti?
d) dov'è crescente e dov'è decrescente?
e) Esistono massimi o minimi?

Infine, sulla base dei dati raccolti nei punti precedenti, tracciare un grafico approssimativo della funzione.

2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \left(\cos^2(x)\sin(x) + \frac{x}{1-4x^2}\right) dx; \qquad \int_1^3 (1-x)^3 dx.$$

3) Scrivere il polinomio di Taylor della funzione:

$$f(x) = e^{2x}$$

con valore iniziale $x_0 = 0$ e con $n = 5$.

4) Risolvere, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - 2y - z & = & 0 \\ 2x - y + 3z & = & -2 \end{cases}$$

Istituzioni di Matematiche I
per Scienze Geologiche

A.A. 1997/98

3ª prova

8 maggio 1998

1) Si scriva il polinomio di Taylor di grado 5 e punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione:

$$f(x) = e^x + \sin(x).$$

Si dia poi una stima del resto $R_5(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ (si ricordi che il numero di Nepero e è un numero positivo ≤ 3).

2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx; \quad \int 3\cos^2(x)\sin(x)\,dx; \quad \int \sqrt[3]{x-3}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx.$$

3) Data la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(A)$ e la matrice $B = A^{-1}$; risolvere poi il seguente sistema lineare (con il metodo di Gauss-Jordan):

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$