

Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

19 gennaio 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia $A = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$. Quanti elementi ha l'anello A ? Descrivere tutti gli elementi di A che sono invertibili.
2. Dire per quali valori di $a, b \in \mathbb{Z}$ il polinomio

$$f_{a,b} = x^{47+a} + 2x^{12+3b} + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$$

è potenza settima di un polinomio $g \in \mathbb{Z}_7[x]$ (ovviamente è sott'inteso che a e b devono essere tali da rendere gli esponenti di x non negativi).

3. Trovare il polinomio minimo sul campo \mathbb{Q} del numero complesso $3 + 3i$. Sia poi $K = \mathbb{Q}(3 + 3i)$. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{3}$ su K . Dire infine quanto vale $[\mathbb{Q}(3 + 3i, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.
4. Usando il metodo di Berlekamp, provare che il polinomio

$$x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

è il prodotto di due fattori irriducibili.