

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**  
**Prova scritta**

21 settembre 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia  $\mu : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$  la funzione di Möbius. Calcolare:

$$\sum_{d \in A} \mu(d), \quad \text{dove } A = \{d \text{ t.c. } 6 \mid d, d \mid 360\}$$

Più in generale, siano  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tali che  $m \mid n$ . Calcolare:

$$\sum_{d \in A} \mu(d), \quad \text{dove } A = \{d \text{ t.c. } m \mid d, d \mid n\}$$

2. Sia  $a \in \mathbb{N}$ . Calcolare  $\text{mcd}(a-2, a^2+3a+2)$ .
3. Sia  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)$ . Spiegare brevemente perchè nel campo  $K$  esistono le radici cubiche di ogni elemento. Sia poi  $[a+bx]$  un elemento di  $K$  (con  $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ). Trovare quanto vale, in funzione di  $a$  e  $b$ ,  $\sqrt[3]{a+bx}$ .
4. Provare che il polinomio  $x^4 + 4x^2 + 7x + 7 \in \mathbb{Q}[x]$  è irriducibile in  $\mathbb{Q}[x]$ .