

Corso di Studi in Matematica  
Corso di **Algebra 2**  
**Esercizi - III**

8 novembre 2009

1. Sia  $A$  un anello di caratteristica  $r$  e  $B$  un anello di caratteristica  $s$ . Trovare la caratteristica dell'anello prodotto  $A \times B$ .
2. Sia  $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  (con  $p > 2$  numero primo), e sia  $m = (p-1)/2$ . Sia  $b$  l'inverso di  $a^m$ . Quanto vale  $b^2$ ?
3. In  $\mathbb{Z}_7[x]$  si consideri il polinomio

$$f = ax^{12} + (a+b+1)x^9 + (a+b^2)x^7 + 3x + 2a + b, \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{Z}_7$$

Per quali valori di  $a$  e  $b$  esiste un polinomio  $g \in \mathbb{Z}_7[x]$  tale che  $f = g^7$ ?

4. Provare che ci sono infiniti  $a \in \mathbb{Z}$  tali che il polinomio

$$f_a = x^3 + 3x^2 + 6x + a \in \mathbb{Z}[x]$$

è irriducibile.

5. Seguendo passo passo la dimostrazione del teorema cinese del resto, risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2}; \\ x \equiv 2 \pmod{3}; \\ x \equiv 2 \pmod{5}; \end{cases}$$

6. Sia  $g \in \mathbb{Z}_p[x]$  (con  $p$  numero primo). Calcolare

$$\prod_{i=1}^p (g + i)$$

7. Trovare i fattori irriducibili del polinomio  $x^5 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ .