

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**  
**Prova scritta**

30 gennaio 2013

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia  $A$  un anello e siano  $\alpha$  e  $\beta$  due ideali di  $A$ . Sapendo che esiste  $a \in \alpha$  e  $b \in \beta$  tali che  $a + b$  è invertibile, provare che gli anelli  $A/(\alpha \cap \beta)$  e  $A/\alpha \times A/\beta$  sono isomorfi.
2. Sia  $v : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$  data da  $v(f(x)) = f(\sqrt[3]{2})$ . Trovare  $\ker(v)$ .
3. Provare che esistono infiniti  $a \in \mathbb{Z}$  tali che il polinomio

$$(a + 9)x^4 + 5x^2 + a + 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

è irriducibile.

4. Provare che  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$  è un campo, dire quanti elementi ha e trovare tutti i suoi elementi primitivi.