

Università degli studi di Trieste
Corso di Studi in Matematica

Algebra 2 (9 cfu)

docente: **prof. Alessandro Logar**

anno accademico: 2010-2011

1 Richiami/premesse

Richiami su gruppi, anelli, campi; omomorfismi, nucleo, immagine. Sottogruppi, sottogruppi normali, gruppo quoziente, teoremi di omomorfismo, teorema del doppio quoziente, gruppi ciclici. Ideali, anelli quoziente, ideali primi, ideali massimali; elementi invertibili e divisori dello zero in un anello; domini di integrità; l'anello degli interi, i suoi ideali e i suoi quozienti (\mathbb{Z} e \mathbb{Z}_m). Piccolo teorema di Fermat; teorema cinese del resto in \mathbb{Z} , divisione tra interi, algoritmo di Euclide e identità di Bezout.

Approfondimento sugli anelli: ideali di un anello principali e finitamente generati, ideali generati da un sottoinsieme dell'anello; caratteristica di un anello, ogni anello contiene (una copia isomorfa di) \mathbb{Z} o di \mathbb{Z}_m . La caratteristica di un dominio d'integrità o è 0 o è un numero primo; in un anello di caratteristica p (con p primo) vale: $(a + b)^p = a^p + b^p$.

2 Polinomi in una indeterminata

Costruzione dell'anello dei polinomi in una indeterminata (a coefficienti in un anello), grado di un polinomio. Termine/coefficiente direttivo di un polinomio, termine noto, polinomio monico. Principio di identità tra polinomi. L'anello dei polinomi costruito su un dominio d'integrità è, a sua volta, un dominio d'integrità. Un omomorfismo ϕ tra due anelli si estende in unico modo in un omomorfismo $\psi : A[x] \longrightarrow B[x]$ tale che $\psi(x) = x$. Omomorfismo di valutazione ($f(x) \mapsto f(a)$). Dato un omomorfismo di anelli $\phi : A \longrightarrow B$ e dato un elemento $b \in B$, esiste un unico omomorfismo $\psi : A[x] \longrightarrow B$ che estende ϕ e tale che $\psi(x) = b$.

Divisione tra polinomi. Anello dei polinomi a coefficienti in un campo; polinomi riducibili e irriducibili, algoritmo della divisione. Teorema di Ruffini. Radici di un polinomio. Teorema di D'Alembert (un polinomio di grado n a coefficienti in un campo ha al massimo n radici). Se un campo è infinito

allora due polinomi f e g sono uguali se e solo se $f(a) = g(a)$ per ogni elemento a del campo.

L'anello dei polinomi $K[x]$ con K campo: nozione di massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi. Algoritmo di Euclide e l'identità di Bezout per polinomi. Definizione di polinomi associati. Due massimi comuni divisori di due polinomi sono tra loro associati. L'anello dei polinomi $K[x]$ (K campo) è un dominio ad ideali principali.

3 Fattorizzazione di polinomi, parte I

Polinomi irriducibili in $K[x]$ (K campo). L'anello dei polinomi è un UFD (dominio a fattorizzazione unica). Campi algebricamente chiusi. Teorema fondamentale dell'algebra: il campo \mathbb{C} dei numeri complessi è algebricamente chiuso (breve cenno della dimostrazione), In \mathbb{R} i polinomi irriducibili o sono di grado 1, o sono di grado 2 e hanno il discriminante negativo.

Derivata di un polinomio. Se la derivata di un polinomio $f \in K[x]$ (K campo) vale 0 allora o il polinomio è una costante o, se la caratteristica di K è p , allora è della forma g^p , dove g è un opportuno polinomio di $K[x]$. Se un polinomio f di $K[x]$ ha fattori multipli, allora il massimo comun divisore tra f e la sua derivata è diverso da 1. Vale anche il viceversa, purché il campo sia di caratteristica 0 o sia finito. Definizione di campo perfetto. Isomorfismo di Frobenius.

4 Fattorizzazione di polinomi, parte II

Polinomi di $\mathbb{Q}[x]$ e di $\mathbb{Z}[x]$. Definizione di polinomio primitivo di $\mathbb{Q}[x]$. Il prodotto di polinomi primitivi è primitivo. Lemma di Gauss. Fattorizzazione di polinomi in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$. Ricerca delle radici razionali di un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$. Criterio di irriducibilità di Eisenstein. In $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}[x]$ ci sono infiniti polinomi irriducibili in ogni grado.

Teorema cinese del resto in $\mathbb{Z}[x]$ (e in un anello qualunque). Fattorizzazione di polinomi in $\mathbb{Z}[x]$: il metodo di Schubert (Kronecker). La fattorizzazione di polinomi in $\mathbb{Z}_p[x]$: il metodo di Berlekamp (i 3 teoremi di Berlekamp). Fattorizzazione di polinomi in $\mathbb{Z}[x]$ usando fattorizzazioni in $\mathbb{Z}_p[x]$. Cenno al metodo di sollevamento di Hensel.

5 Polinomi in più variabili

La costruzione dell'anello dei polinomi in più variabili, grado globale, grado relativo ad una variabile, definizione di monomi, termini. Principio di identità tra polinomi. Ogni polinomio è somma finita di monomi; polinomi omogenei, ogni polinomio è somma finita di polinomi omogenei. Se A è un dominio di integrità, allora lo è anche $A[x_1, \dots, x_n]$, se A è un dominio a fattorizzazione unica, allora lo è anche $A[x_1, \dots, x_n]$ (senza dimostrazione). Estensione di un omomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ ad un omomorfismo $\psi : A[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow B$ tale che $\phi(x_i) = b_i$ (dove b_1, \dots, b_n sono n elementi fissati in B).

L'anello $K[x_1, \dots, x_n]$ (con K campo) è uno spazio vettoriale su K di dimensione infinita (una base è costituita dall'insieme dei termini). Esempi di ideali in $K[x_1, \dots, x_n]$: ideali non principali, ideali primi, ideali massimali; gli ideali della forma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ (con $a_i \in K$) sono tutti massimali.

6 Campi

Costruzione del campo dei quozienti $Q(A)$ di un dominio A . Proprietà universale di $Q(A)$.

Estensione di campi: $K \subseteq L$ (denotata anche con $L : K$). Dati $L : K$ e $b_1, \dots, b_n \in L$, il campo $K(b_1, \dots, b_n)$, cioè il più piccolo campo che contiene K e b_1, \dots, b_n . Vale: $K(b_1, \dots, b_n) = Q(K[b_1, \dots, b_n])$ (dove $K[b_1, \dots, b_n]$ indica il più piccolo sottoanello di L che contiene K e b_1, \dots, b_n). Estensioni semplici. Elementi algebrici e trascendenti. Cenno alla trascendenza di e e π su \mathbb{Q} . Polinomio minimo di un elemento algebrico. Se $L : K$ è un'estensione di campi e se $a \in L$ è algebrico su K , allora $K[a] = K[x]/(m)$, dove m è il polinomio minimo di a su K . Grado di un'estensione di campi. Legge della torre, legge della torre generalizzata. Dato un polinomio $f \in K[x]$ (con K campo), esiste un ampliamento di K che contiene uno zero di f . Campo di riducibilità completa di un polinomio. Il campo dei complessi \mathbb{C} ottenuto come il quoziente $\mathbb{R}/(x^2 + 1)$.

Costruzioni con riga e compasso. Teoremi di Wantzel: con riga e compasso non si può duplicare il cubo; l'angolo $\pi/3$ non può essere trisecato con riga e compasso.

7 Campi finiti

Un campo finito (di caratteristica p) è uno spazio vettoriale su \mathbb{Z}_p , quindi la cardinalità di un campo finito è sempre la potenza di un numero primo. Teorema dell'elemento primitivo: se K è un campo finito, allora $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è

un gruppo ciclico. Un campo finito è della forma: $\mathbb{Z}_p[x]/(q)$ con q polinomio irriducibile. Polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$. Il polinomio $x^{p^n} - x$ è il prodotto di tutti i polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$ di grado d , con $d|n$. Funzione di Moebius. Calcolo del numero di polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$. (formula di inversione di Moebius). Tutti i campi finiti dello stesso ordine sono isomorfi; dato p numero primo ed n , numero naturale, esiste sempre un campo con p^n elementi (e, per quanto detto, è unico). Tale campo si indica con $\text{GF}(p, n)$ e si chiama campo di Galois.

8 Calcolo simbolico

Cenno ad alcuni programmi di calcolo simbolico: Sage e Maple.

Testi seguiti

- Lindsay N. Childs, *A concrete introduction to higher algebra*, Springer, I edizione (1990) e III edizione (2009);
- Ian Stewart, *Galois theory*, Chapman & Hall/Crc Mathematics (2004);
- Nathan Jacobson, *Basic Algebra*, San Francisco: W.H. Freeman (1974);
- Israel N. Herstein, *Algebra*, Roma, Editori Riuniti (1992).