A.A. 2020–2021
Università di Trieste
Corso di studi in matematica
Matematiche Complementari
Alessandro Logar

Teoria assiomatica degli insiemi. Richiami di logica. La teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. I primi tre assiomi (estensionalità, esistenza dell'insieme vuoto, assioma delle coppie). Unicità dell'insieme vuoto, definizione di coppia ordinata, definizione di n-upla ordinata. I successivi tre assiomi (assioma di separazione, assioma dell'insieme delle parti, assioma dell'unione). Definizione di intersezione e di unione di due insiemi. Definizione di insieme prodotto cartesiano di due (e più) insiemi. Applicazioni tra insiemi. Gli ultimi tre assiomi (assioma dell'infinito, assioma di rimpiazzamento, assioma di fondazione) e discussione sul loro significato. L'assioma della scelta. Varie sue formulazioni. Prodotto infinito di insiemi. L'assioma della scelta equivale ad affermare che prodotto di insiemi non vuoti è non vuoto. Conseguenze dell'assioma della scelta (lemma di Zorn, esistenza di basi per spazi vettoriali, esistenza di ideali massimali in anelli unitari,...).

I numeri naturali. Insiemi induttivi. Esistenza di un insieme induttivo (assioma ZF7). L'insieme dei numeri naturali viene definito come il più piccolo insieme induttivo (o come l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi). Funzione successore. Se un sotto-insieme A di $\mathbb{N}$ è tale che contiene lo zero e, se contiene un elemento, contiene il suo successore, allora A coincide con $\mathbb{N}$ (principio di induzione). Ordinamento su $\mathbb{N}$. Proprietà dell'ordinamento. L'ordinamento di $\mathbb{N}$ è un buon ordinamento. Gli assiomi di Peano. Operazioni di somma e prodotto sui naturali. Definizione di insiemi finiti. Insiemi infiniti numerabili.

Anelli e campi ordinati. Costruzione dell'anello degli interi e del campo dei razionali (breve richiamo). Definizione di anello ordinato. Elementi positivi e negativi in un anello ordinato. Proprietà degli anelli ordinati. Un anello ordinato è necessariamente infinito, di caratteristica 0 e dominio d'integrità. Anelli ordinati archimedei. Isomorfismo di anelli ordinati. Il valore assoluto in un anello ordinato e sue proprietà. Anello denso in sè. Ogni campo ordinato è denso in sè. Estensione dell'ordinamento da un anello ordinato al suo campo dei quozienti. Ogni anello ordinato contiene (una copia isomorfa di) $\mathbb{Z}$. Ogni campo ordinato contiene (una copia isomorfa di) $\mathbb{Q}$.

Ampliamenti cantoriani. Successioni di Cauchy in un campo ordinato K. Alcune proprietà delle successioni di Cauchy: sono limitate; in buone ipotesi, il reciproco degli elementi di una successione di Cauchy è di Cauchy; la successione costante è di Cauchy; la successione opposta di una successione di Cauchy è di Cauchy. Somma e prodotto di successioni di Cauchy sono di Cauchy. L'insieme M di tutte le successioni di Cauchy è un anello e l'insieme di tutte le successioni infinitesime è un suo ideale massimale, quindi il quoziente $\overline{K} = M/I$ è un campo che contiene una copia isomorfa di K. Su $\overline{K}$ si può introdurre un ordinamento che rende $\overline{K}$ un campo ordinato. Il campo $\overline{K}$ si dice ampliamento cantoriano di K. Se K è archimedeo, anche $\overline{K}$ lo è.

Numeri reali: prima costruzione. Un campo ordinato si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente. L'ampliamento cantoriano di un campo ordinato archimedeo è completo. Il campo $\mathbb{R}$ si può allora definire come l'ampliamento cantoriano del campo archimedeo $\mathbb{Q}$. A meno di isomorfismi, esiste un unico campo ordinato archimedeo completo (che quindi è $\mathbb{R}$).

Numeri reali: costruzione di Dedekind. Massimo, minimo, maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore in un insieme ordinato. L'esistenza dell'estremo superiore (per sotto-insiemi non vuoti superiormente limitati) o estremo inferiore (per sotto-insiemi non vuoti inferiormente limitati) equivale alla completezza. Definizione di sezione (o taglio) di Dedekind in un campo ordinato K. Definizione di sezione sinistra di Dedekind (su K). Sull'insieme $\tilde{K}$ delle sezioni sinistre di un campo ordinato archimedeo K si può definire una somma, un prodotto e un ordinamento e $\tilde{K}$ diventa un campo ordinato completo archimedeo, quindi il campo $\mathbb{R}$.

Numeri algebrici e trascendenti. Irrazionalità di alcuni numeri: vari modi per verificarla. Definizione di numeri algebrici e trascendenti. Richiami di alcune nozioni di algebra (polinomio minimo, estensione di campi, grado di un'estensione, estensioni algebriche, teorema della torre, fattorizzazione di polinomi, lemma di Gauss). I polinomi di Chebyshev. Il loro utilizzo per esprimere $\cos(nx)$ in funzione di $\cos(x)$. Il seno, il coseno, la tengente (quando definita) di ogni angolo multiplo razionale di π è un numero algebrico. Se il seno o il coseno di un angolo multiplo razionale di π è razionale, allora l'angolo può essere solo 0 o $\pi/6$ o $\pi/2$ (per il caso del seno) o 0, $\pi/3$, $\pi/2$ (per il caso del coseno) (assumendo che l'angolo sia preso tra 0 e $\pi/2$). Trascendenza di numeri come $\mathrm{Log}_{10}\, r$ (con $r \in \mathbb{Q}$). Cenno al 7^o problema di Hilbert e al teorema di Gelfond e Schneider: se a è algebrico diverso da 0 e 1 e se b è algebrico di grado maggiore di 1, allora a^b è trascendente.

Numeri in forma decimale: altro modo di costruire i numeri reali. Scrittura di un numero in forma decimale. I numeri razionali sono o decimali finiti o periodici. Definizione dei numeri razionali attraverso la loro rappresentazione in forma decimale. Ordinamento sui numeri razionali definiti in forma decimale (periodica o finita). Calcolo della frazione generatrice di un numero razionale. Cenno sulla costruzione dei numeri reali attraverso la loro forma decimale: un numero reale è definito come una terna (σ, p, ϕ) dove σ è il segno, p è un numero naurale e $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$ è un'applicazione. Definizione di successione stabilizzata. Costruzione di $\mathbb{R}$ attraverso l'uso delle successioni stabilizzate.

Frazioni continue. L'algoritmo per il calcolo del massimo comun divisore di Euclide e la trasformazione di un numero razionale in frazione continua. I termini di una frazione continua (finita). La regola di Eulero per il calcolo del numeratore e del denominatore di una frazione continua data dai suoi termini. I convergenti di una frazione continua. Posizionamento (sulla retta reale) dei convergenti di una frazione continua (quelli di posto pari formano una successione crescente, quelli di posto dispari formano una successione decrescente). I convergenti sono frazioni ridotte ai minimi termini. Estensione delle varie nozioni introdotte sulle frazioni continue finite alle frazioni continue infinite. Caratterizzazione dei numeri razionali con le frazioni continue. Ogni frazione continua infinita individua univocamente un numero reale e viceversa. Costruzione di numeri trascendenti. Il teorema di Liouville sull'approssimazione di numeri algebrici. Numeri di Liouville, i numeri di Liouville sono trascendenti. La costante di Liouville (primo esempio di numero trascendente). Numeri irrazionali algebrici di grado 2. Teorema di Lagrange: la frazione continua associata ad un numero è periodica se e solo se il numero è algebrico di grado 2 (dimostrazione parziale).

Costruzioni geometriche con riga e compasso. Gli assiomi che definiscono le costruzioni con riga e compasso. Esempi di costruzioni con riga e compasso. Definizione di punti del piano costruibili con riga e compasso (partendo da $\mathscr{P}_0$, un insieme dato di punti). Campi associati alle coordinate dei punti del piano (costruiti con riga e compasso). Se K_0 è il campo associato ai punti $\mathscr{P}_0$ e se $Q = (x, y)$ è un punto costruibile con riga e compasso a partire da $\mathscr{P}_0$, allora $[K_0(x) : K_0]$ e $[K_0(y) : K_0]$ sono potenze di 2. I teoremi di Wantzel: con riga e compasso non si può duplicare il cubo; in generale, con riga e compasso, non si può trisecare un angolo. Costruzioni con riga e compasso per calcolare la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, la radice quadrata di numeri costruibili (utilizzando i teoremi di Euclide o il teorema di Talete o il teorema della secante e tangente...). Poligoni regolari. Costruzione di alcuni poligoni regolari con riga e compasso. Il pentagono regolare. Il numero aureo. Il teorema di Gauss-Wantzel (un poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso se e solo se $n = 2^r \cdot p_1 \cdots p_k$ dove $p_1, \ldots, p_k$ sono primi di Fermat (senza dimostrazione). Metodi per costruire, con riga e compasso, approssimazioni di poligoni regolari di n lati. Cenno su alcune "macchine matematiche" per le risoluzioni di problemi non ottenibili con riga e compasso.

Le regole dell'origami. Alcuni esempi. Costruzione del triangolo equilatero, del rapporto aureo, del pentagono regolare. Definizione di punti costruibili con le regole dell'origami: i sette assiomi di Huzita Hatori. L'assimoma H_5 permette di costruire punti di una parabola di fuoco e direttrice assegnati. In particolare con H_5 si possono calcolare le radici quadrate di numeri costruibili con le regole dell'origami. I primi cinque assiomi permettono di costruire tutti i punti che si possono costruire con riga e compasso. Viceversa, tutti i punti costruibili con riga e compasso, sono ottenibili dai primi cinque assiomi di Huzita Hatori. Come costruire, con i primi cinque assiomi, l'intersezione di una retta e una circonferenza o di due circonferenze. L'assioma H_6 permette, quando possibile, di trovare una retta tangente a due parabole (date per mezzo dei fuochi e delle direttrici). In conseguenza, con l'assioma H_6 si possono risolvere le equazioni di terzo grado (con coefficienti numeri costruibili). In particolare, con le regole dell'origami, si può dare una soluzione al problema della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo. La dipendenza dei sette assiomi di Huzita Hatori. Il metodo di Lill per individuare radici reali di polinomi. Il quadrato di

Beloch. Cenno alla costuibilità con le regole dell'origami di poligoni regolari.

Riferimenti bibliografici

[Alp] Roger C. Alperin, *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, New York J. Math.6 (2000) 119–133.

[Boy] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, 1968.

[Def] Francesco Defina, *Teoria degli Origami: analisi di una teoria assiomatica* Tesi di Laurea Magistrale, Univ. Padova, 2018. `http://tesi.cab.unipd.it/61601/`

[Har] Harold, Davenport, *Aritmetica superiore: un'introduzione alla teoria dei numeri*, Zanichelli - 1994.

[Gol] Derek Goldrei, *Classic Set Theory for guided independent study*, Chapman and Hall, 1996.

[Haj] Andras Hajnal, Peter Hamburger, *Set Theory*, London Mathematical Society, 1999.

[Hen] James M. Henle, *An Outline of Set Theory* Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.

[Khi] Aleksandr Khinchin, *Continued Fractions*, Dover, 1997.

[Lan] Robert Lang, *Origami and geometric constructions* `https://pdfs.semanticscholar.org/aa2d/e2db35a0dcaa6ab929c95ef9e0168f14659c.pdf`

[Niv] Ivan Niven, *Numeri razionali e irrazionali*, Zanichelli, 1968.

[Pag] Domenico Pagani, Sandro Salsa, *Analisi matematica 1*, Zanichelli, 2015.

[Per] Rodolfo Permutti, *Lezioni di algebra*.

[Row] Sundara Row, *Geometric exercises in paper folding*, Dover Publications, 1966.

[Ste] Ian Steward, *Galois theory*, Chapman and Hall 2003.