I Provetta

Istituzioni di Matematiche II per Sc. Geologiche
A.A. 1999–2000

15 gennaio 2000

1) Provare che i tre vettori:

$$v_1 = (0,1,0), \quad v_2 = (1,0,1), \quad v_3 = (1,1,0)$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Calcolare le cooridinate di $v = (1,1,1)$ rispetto a tale base.

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_3).$$

a) Calcolare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
b) Determinare una base di $\mathrm{Im}\,(f)$ e di $\mathrm{kern}\,(f)$;
c) f è iniettiva? È suriettiva? Giustificare le risposte.

3) Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y),$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi\}$.
a) Calcolare il gradiente di f e la matrice hessiana;
b) Dire quale dei seguenti punti di A è massimo o minimo per f e giustificare la risposta:

$$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad (\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}), \quad (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi), \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi).$$

4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$y'(x) = 3y(x) + e^x, \quad y'(x) = \frac{\cos(x)}{y^2}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$