

**Corso di laurea Matematica**  
**Complementi di Algebra**  
**a.a. 2018–19**  
**Scritto 6 giugno 2019**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo di ordine 357: dimostrare che  $G$  contiene un 7-Sylow normale; dimostrare che il 17-Sylow di  $G$  è contenuto nel centro di  $G$ ; discutere il possibile numero dei 3-Sylow; dimostrare che  $G$  è risolubile.
2. Sia  $H$  un gruppo abeliano. Si considerino  $T, T'$  due sottogruppi finiti di  $H$ ; siano invece  $F, F'$  due sottogruppi di  $H$  abeliani liberi. Si provi che se  $H = T \times F = T' \times F'$  allora  $T = T'$ . Vale la stessa proprietà per  $F$  e  $F'$ ?
3. Sia  $f = x^3 + 5x^2 + 5x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ . Sia  $L \subseteq \mathbb{C}$  il campo di spezzamento di  $f$  su  $\mathbb{Q}$ . Trovare il gruppo di Galois  $\Gamma(L : \mathbb{Q})$ .
4. Sia  $L$  la chiusura normale dell'estensione  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}$ . Calcolare  $L$ ,  $[L : \mathbb{Q}]$  e indicare una base di  $L$  su  $\mathbb{Q}$ .  
Facoltativo: indicare gli elementi del gruppo di Galois  $\Gamma(L : \mathbb{Q})$  e dire chi è tale gruppo.