

**Corso di laurea Matematica**  
**Complementi di Algebra**  
**a.a. 2018–19**  
**Scritto 3 settembre 2019**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Se  $p$  è primo, dimostrare che un gruppo di ordine  $p^2$  è abeliano. Dimostrare inoltre che esistono gruppi di ordine 8 e di ordine 27 non abeliani.
2. Siano  $p$  e  $q$  due primi distinti. Si classifichino a meno di isomorfismi i gruppi abeliani di ordine  $p^3q^2$ . Si dimostri che un gruppo di ordine  $pq$  è risolubile.

3. Provare che vale:

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}] : \mathbb{Q}] = 8.$$

4. Calcolare la chiusura normale dell'estensione  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}$ .