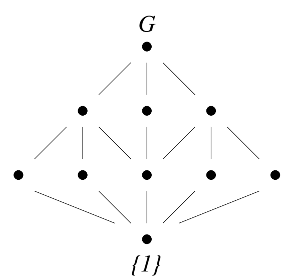
Sia $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Per Eisenstein, f è irriducibile. Se ξ indica $\sqrt[4]{2}$, cioè quell'unico numero reale positivo tale che $\xi^4 = 2$, le quattro radici di f sono: $\xi, -\xi, i\xi, -i\xi$ (dove $i = \sqrt{-1}$). Il campo di spezzamento di f è $L = \mathbb{Q}[\xi, i]$.

- Usando il teorema della torre, provare che $[L : \mathbb{Q}] = 8$ e provare che una base di L su $\mathbb{Q}$ è data da $1, \xi, \xi^2, \xi^3, i, i\xi, i\xi^2, i\xi^3$.
- Provare che esiste un $\mathbb{Q}$-automorfismo σ di L tale che $\sigma(i) = i$ e $\sigma(\xi) = i\xi$ e un altro $\mathbb{Q}$-automorfismo τ tale che $\tau(i) = -i$, $\tau(\xi) = \xi$.
- Trovare il gruppo generato da questi due automorfismi.
- Sia ϕ un $\mathbb{Q}$-automorfismo di L. Allora ϕ deve mandare uno zero di $x^2 + 1$ in uno zero di $x^2 + 1$ e deve mandare ξ in uno dei 4 valori possibili $\xi, -\xi, i\xi, -i\xi$. Dedurre che $G = \Gamma(L, \mathbb{Q})$ è il gruppo generato da σ e τ.
- Osservando il comportamento di σ e τ (le loro potenze e i loro prodotti) dedurre che G è il gruppo diedrale $\mathbb{D}_8$.
- Trovare tutti i possibili sottogruppi di G, il loro ordine e il loro tipo. Trovare le inclusioni che intercorrono tra di essi. Si dovrebbe trovare che sono 10 (incluso G e il gruppo identico) e che si dispongono secondo il seguente reticolo (di inclusioni di sottogruppi):



- Da questo reticolo ottenere l'analogo reticolo di campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e L.
- Cercare di descrivere tutti i campi intermedi, i loro gradi su $\mathbb{Q}$ e vedere quando sono estensioni normali di $\mathbb{Q}$. Ad esempio, un sottogruppo di G è dato da $T = \{1, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\}$. Calcolare allora $\beta(T)$ (usare la base di L su $\mathbb{Q}$ scritta sopra e vedere quindi come ottenere gli elementi di L fissati da T). Si dovrebbe trovare che il campo intermedio è $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Ripetere il calcolo per gli altri sottogruppi.
- Trovare i sottogruppi normali di G e le estensioni normali di $\mathbb{Q}$ e vedere che si corrispondono nella corrispondenza di Galois.