Corso di studi in Matematica

Complementi di algebra - Teoria di Galois

Alessandro Logar

Diario lezioni.

Lezione 1. Introduzione al corso. Equazioni di I, II, III, e IV grado. Le formule di Cardano, il metodo usato da Lagrange per ottenere le formule risolutive delle equazioni di grado 2, 3 e 4 con un procedimento unico (il risolvente di Lagrange).

Lezione 2. Richiami di algebra. Anelli, ideali, ideali massimali, omomorfismi, campi. Estensione di campi. Campo esteso con un insieme di elementi. Elementi algebrici e trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico.

Lezione 3. Estensione di un omomorfismo $f : A \longrightarrow B$ ad un omomorfismo $FA[x] \longrightarrow B$ che manda x in elemento di B fissato. Stesso risultato per più variabili. Dati due anelli $A \subseteq B$, e $b_1, \ldots, b_n \in B$, descrizione del più piccolo anello che contiene A e $b_1, \ldots, b_n$ (ed è contenuto in B). Definizione di $A[b_1, \ldots, b_n]$. Analogo problema per i campi. Definizione di $K(a_1, \ldots, a_n)$.

Lezione 4. Definizione di $L : K$, estensione di campi. Se $a_1, \ldots, a_n \in L$ sono algebrici su K, allora $K[a_1, \ldots, a_k] = K(a_1, \ldots, a_n)$. Estensioni semplici. Estensioni finite di campi. La notazione $[L : K]$. IL grado di un'estensione. Teorema della torre. Estensioni algebriche. Se un'estensione è finita, allora è algebrica. Il campo dei numeri algebrici.

Lezione 5. Campo di spezzamento di un polinomio: definizione e costruzione. Unicità del campo di spezzamento (a meno di isomorfismi). Definizione di estensione normale di campi. $L : K$ è un'estensione normale e finita se e solo se L è campo di spezzamento di un polinomio di $K[x]$.

Lezione 6. Il derivato di un polinomio e sue proprietà. Definizione di polinomio separabile. In caratteristica 0 ogni polinomio irriducibile è separabile. Così pure nei campi finiti. Estensioni separabili. Ereditarietà della separabilità. Data un'estensione $L : K$ con $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ separabili su K. Allora $L : K$ è separabile.

Lezione 7. Definizione di K-monomorfismo tra due campi L ed M, entrambi estensioni di K. Data estenzione $L : K$ finita e normale, M campo intermedio, un K-monomorfismo $\tau : M \longrightarrow L$ si estende a un K-automorfismo di L. Definizione di chiusura normale. Esistenza e unicità (a meno di isomorfismi) della chiusura normale. Caratterizzazioni delle estensioni normali. Se $L : K$ è un estensione finita separabile, di grado n, allora esistono esattamente n K-monomorfismi da L in N (dove N è chiusura normale di $L : K$).

Lezione 8. Definizione di gruppo di Galois $\Gamma(L : K)$ di un'estensione $L : K$. La corrispondenza di Galois e sue prime proprietà. Lemma di Dedekind sull'indipendenza lineare dei monomorfismi di campi.

Lezione 9. Sia G un sottogruppo finito del gruppo di automorfismi di un campo K. Se K_0 è il campo fissato da G, allora $[K : K_0] = |G|$. Conseguenze: se $G = \Gamma(L : K)$ e H è sottogruppo di G, allora $[\beta(H) : K] = [L : K]/|H|$ (dove $\beta(H)$ è il campo fissato da H). Inoltre: Se $L : K$ è normale e separabile, allora $\Gamma(L : K) = [L : K]$ e se $L : K$ finita e separabile e normale, allora $K = \beta(G)$, dove G è il gruppo di Galois di $L : K$.

Lezione 10. Il teorema principale: la corrispondenza di Galois. Sia $L : K$ un'estensione finita, sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei campi intermedi tra K ed L e sia $\mathcal{G}$ l'insieme dei sottogruppi di Galois di $\Gamma(L : K)$. Siano infine

$$\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

date da: $\alpha(M) = \Gamma(L : M)$ e $\beta(H)$ il sottocampo di L fissato da H. Se $L : K$ è estensione finita, normale e separabile, allora α e β sono una l'inversa dell'altra. Le due applicazioni ribaltano le inclusioni. Il gruppo di Galois $\Gamma(L : K)$ ha $[L : K]$ elementi. Se M è un campo intermedio, $[L : M] = |\alpha(M)|$, un campo intermedio $M \in \mathcal{F}$ è normale su K se e solo se $\alpha(M)$ è un sottogruppo normale di $\Gamma(L : K)$, se $M \in \mathcal{F}$ è estensione normale di K, allora $\Gamma(M; K) = \Gamma(L : K)/\alpha(M)$.

Lezione 11. Estensioni radicali. Definizione di risolubilità per radicali. Lemmi preparatori.

Lezione 12. Dimostrazione del fatto che se un polinomio è risolubile per radicali, allora il suo gruppo di Galois è un gruppo risolubile.

Lezione 13. Dimostrazione del teorema che se $f \in K[x]$ è un polinomio il cui gruppo di Galois è un gruppo risolubile, allora il polinomio è risolubile per radicali. Esempi. Alcuni cenni alle costruzioni con riga e compasso e ai poligoni regolari.