

Università di Trieste  
Corso di Studi in Matematica  
Laurea Magistrale

## Algebra Computazionale

a. a. 2012–13

docente: prof. Alessandro Logar

**Ideali, moduli, term order** — Moduli su un anello (commutativo unitario). Somma diretta di moduli, somma diretta interna ed esterna, moduli liberi. Sequenze esatte e sequenze esatte corte. Anelli e moduli noetheriani e loro principali proprietà. Teorema della base di Hilbert. Anello  $P$  dei polinomi in  $n$  indeterminate su un campo. Definizione di termini di  $P$  (indicati con  $\mathbb{T}$ ) e di  $P^r$  (indicati con  $\mathbb{T}\langle e_1, \dots, e_r \rangle$ ). Ideali e moduli monomiali. Teorema di struttura dei moduli monomiali. Ordinamenti sui termini di  $P$  (esempi: **Lex**, **DegLex**, **DegRevLex**) e sui termini di  $P^r$  (esempi: **ToPos**, **PosTo**). Equivalenza di un term order con un buon ordinamento. Definizione di  $LT_\sigma$ ,  $LM_\sigma$ ,  $LC_\sigma$ . Teorema della base di Macaulay. Algoritmo di divisione. Quozienti e resto (o ridotto).

**Anelli graduati** — Anelli graduati (su un monoide), gradazioni su  $P$  (date da  $\mathbb{Z}$  e da  $\mathbb{N}^n$ ). Monomodulo. Moduli graduati. Esempi di graduazioni su moduli, graduazione data da uno shift. Omomorfismo di moduli graduati. Sottomoduli graduati di moduli graduati. Quoziente di moduli graduati. Condizioni necessarie e sufficienti per un modulo affinché sia sottomodulo graduato.

**Basi di Gröbner, I** — Definizione di  $\sigma$ -base di Gröbner per un modulo  $M \subseteq \mathbb{P}^r$  e prime proprietà e caratterizzazioni.

**Sizigie** Definizione delle sizigie di una famiglia finita  $G$  di elementi di un  $P$ -modulo. La sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \text{Siz}(G) \longrightarrow P^s \longrightarrow P^r \longrightarrow P^r/M \longrightarrow 0$$

(dove  $G = (g_1, \dots, g_s)$ , con  $g_i \in P^r$  e  $M$  è il modulo generato da  $G$ ). Gradazione indotta su  $P^s$  data da  $LT(G)$  in modo che l'omomorfismo  $\Phi : P^r \longrightarrow P^s$  definito da  $\Phi(h_1, \dots, h_s) = \sum h_i LM_\sigma(g_i)$  sia un omomorfismo di moduli  $\mathbb{T}\langle e_1, \dots, e_r \rangle$ -graduati. Definizione di  $\sigma$ -grado e  $\sigma$ -forma direttiva (indicati con, rispettivamente:  $\deg_{\sigma, G}$  e  $LF_{\sigma, G}$ , con  $\sigma$  un term order fissato). Calcolo delle sizigie di moduli monomiali.

**Basi di Gröbner, II** — Sollevamento delle sizigie. Caratterizzazione delle basi di Gröbner con il sollevamento delle sizigie. Elemento ridotto rispetto ad una base di Gröbner. Unicità del ridotto. Forma normale di un elemento di  $P^r$  rispetto ad una base di Gröbner. Definizione di  $S$ -vettore, teorema di Buchberger e algoritmo per il calcolo delle basi di Gröbner. Basi di Gröbner minimali e ridotte. Calcolo esplicito delle sizigie con le basi di Groebner e

teorema di Schreyer; sizigie di una base di Groebner e di un sistema di generatori di un modulo. Algebra lineare nell'anello dei polinomi. Presentazione di un modulo. Teorema delle sizigie di Hilbert (dimostrazione di Schreyer).

**Proprietà dei moduli graduati** — Gradazione su  $P$  data da un vettore  $W$  di pesi per le variabili di  $P$ . Sistemi di generatori minimali di un  $P$ -modulo graduato. Lemma di Nakayama, versione omogenea. Invarianza della cardinalità di un sistema minimale di generatori di un  $P$ -modulo finitamente generato. Basi di Gröbner omogenee. Teorema delle sizigie di Hilbert nel caso omogeneo, risoluzione libera minimale di un modulo graduato, unicità della risoluzione (senza dimostrazione), invarianti di un modulo associati alle risoluzioni graduate minimali, numeri di Betti.

**Funzione e serie di Hilbert di un modulo graduato** — Definizione e alcune proprietà della funzione di Hilbert, calcolo della funzione di Hilbert (per mezzo del teorema di Macaulay). La funzione di Hilbert è di tipo polinomiale. Esempi. Serie formali, l'anello dei polinomi di Laurent, serie di Hilbert di un  $P$ -modulo finitamente generato e graduato.

**Polinomi invarianti** — I polinomi simmetrici, polinomi simmetrici elementari. Azione di  $GL(n, \mathbb{C})$  sull'anello dei polinomi. Studio dell'azione di sottogruppi finiti  $\Gamma$  di  $GL(n, \mathbb{C})$  su  $P$ . Operatore di Reynolds, teorema di finitezza di Hilbert, teorema di Molien per il calcolo della serie di Hilbert dell'anello degli invarianti di  $P^\Gamma$ . Un algoritmo per il calcolo degli invarianti fondamentali di  $P^\Gamma$ .

#### Testi principalmente seguiti

1. Martin Kreuzer, Lorenzo Robbiano. *Computational Commutative algebra 1* Springer-Verlag.
2. Martin Kreuzer, Lorenzo Robbiano. *Computational Commutative algebra 2*, Springer-Verlag.
3. David Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry* Springer-Verlag.
4. Bernd Sturmfels. *Computational invariant theory*, Springer-Verlag.
5. M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Un'introduzione all'algebra commutativa*, Feltrinelli.