Dalla teoria sappiamo che se $g_1, \ldots, g_s$ è una σ-base di Gröbner, allora ogni elemento $v \in P^s$ omogeneo, tale che $v \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ si può sollevare ad un elemento $w \in P^s$ tale che $w \in \mathrm{Siz}(\mathcal{G})$. Qui si fornisce un esempio di questo risultato.

Sia $P = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e definiamo su P^2 il term order `PosLex`. Consideriamo il sotto-modulo M di P^2 generato da:

$$\begin{aligned} h_1 &= (x^2y + z,\ xy + xz) \\ h_2 &= (zy,\ x^2) \\ h_3 &= (y^2,\ z^2 - z); \end{aligned}$$

La base di Gröbner del modulo M è data da:

$$\begin{aligned} g_1 &= (y^2, z^2 - z), \quad g_2 = (yz, x^2), \quad g_3 = (x^2y + z, xy + xz), \\ g_4 &= (0, -x^2y + z^3 - z^2), \quad g_5 = (-z^2, x^4 - xyz - xz^2), \\ g_6 &= (0, x^2z^2 - x^2z + x^2 - xy^2 - xyz), \\ g_7 &= (0, xy^3 + xy^2z - z^5 + 2z^4 - 2z^3 + z^2), \\ g_8 &= (0, xz^5 - 2xz^4 + 2xz^3 - xz^2 - y^2z^3 + y^2z^2 - yz^4 + yz^3), \\ g_9 &= (0, y^5z^3 - y^5z^2 + 2y^4z^4 - 2y^4z^3 + y^3z^5 - y^3z^4 - z^{10} + 4z^9 - 8z^8 + \\ &\quad 10z^7 - 8z^6 + 4z^5 - z^4) \end{aligned}$$

Detta G la base di Gröbner $g_1, \ldots, g_9$, vale $M = \langle g_1, g_2, \ldots, g_s \rangle$ e si ha:

$$\mathrm{LM}_\sigma(M) = \langle y^2e_1, yze_1, x^2ye_1, -x^2ye_2, -z^2e_1, x^2y^2e_2, xy^3e_2, xz^5e_2, y^5z^3e_2 \rangle$$

Consideriamo l'elemento $v \in P^9$ dato da:

$$v = (2x^3z^2, -x^3yz, -xyz^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in P^9$$

Esso è un elemento omogeneo nella gradazione di P^9 data da $\mathbb{T}\langle e_1, e_2 \rangle$. Infatti

$$x^3z^2\mathrm{LT}(g_1) = x^3yz\mathrm{LT}(g_2) = xyz^2\mathrm{LT}(g_3) = x^3y^2z^2e_1$$

quindi $v \in (P^9)_{x^3y^2z^2e_1}$. Inoltre $\Phi(v) = 0$, cioè $v \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}(\mathcal{G}))$. Dalla teoria sappiamo che, se G è una base di Gröbner, allora deve esistere un sollevamento $w \in P^9$, cioè deve esistere un elemento $w \in P^9$ tale che $\phi(w) = 0$ e $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}} = v$.

Calcoliamo

$$m = \phi(v) = (-xyz^3, -x^5yz + 2x^3z^4 - 2x^3z^3 - x^2y^2z^2 - x^2yz^3)$$

Allora $m \in \langle g_1, \ldots, g_9 \rangle$ e, possiamo calcolare dei polinomi $f_1, \ldots, f_9 \in P$ tali che $m = \sum f_ig_i$. Precisamente: $m = -xz^2g_2 + x^3zg_4 + xz^2g_6$. Detto $w_1 = (0, -xz^2, 0, x^3z, 0, xz^2, 0, 0, 0) \in P^9$, abbiamo che $m = \phi(w_1)$, quindi $\phi(v) = \phi(w_1)$, cioè $\phi(v - w_1) = 0$, pertanto $w = v - w_1 \in \ker(\phi)$. Vale:

$$w = (2x^3z^2, -x^3yz + xz^2, -xyz^2, -x^3z, 0, -xz^2, 0, 0, 0)$$

e $w \in \mathrm{Siz}((G))$ e $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(w) = v$.