**Esempio relativo alla dimostrazione del teorema delle sizigie di Hilbert**

Sia $P = \mathbb{Q}[x, y, z]$, e sia $N = P/I$, dove $I$ è l'ideale generato da:

$$x^3y - 1, \quad xy^3 - z$$

$N$ è un $P$-modulo finitamente generato (il suo generatore è $n_1 = [1]$). Pertanto abbiamo la mappa $\phi_0 : P \longrightarrow N$ data da $\phi_0(f) = [f \cdot 1]$ e quindi la seguente sequenza esatta corta:

$$0 \longrightarrow \ker(\phi_0) \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

dove $\ker(\phi_0) = I$. La base di Gröbner ridotta rispetto all'ordinamento $\sigma$ dato da `DegRevLex` di $\ker(\phi_0)$ è la seguente:

$$xy^3 - z, \quad x^3y - 1, \quad x^2z - y^2, \quad y^5 - xz^2$$

Seguendo la dimostrazione del teorema delle sizigie di Hilbert, ordiniamo questi elementi in modo che i $\mathrm{LT}_\sigma$ siano in ordine crescente rispetto al term order `PosLex` di $P = \mathbb{Q}[x, y, z]$, quindi la precedente $\sigma$-base di Gröbner viene riscritta così:

$$g_1 = x^3y - 1, \quad g_2 = x^2z - y^2, \quad g_3 = xy^3 - z, \quad g_4 = y^5 - xz^2$$

Sia $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_4)$ e sia $\delta$ il t.o. di $P^4$ indotto da $(\sigma, \mathcal{G})$ (pertanto $t_1\varepsilon_h < t_2\varepsilon_k$ se e solo se $\mathrm{LT}_\sigma(t_1g_h) <_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(t_2g_k)$ o, se $\mathrm{LT}_\sigma(t_1g_h) = \mathrm{LT}_\sigma(t_2g_k)$, allora $h > k$). Costruiamo la $\delta$-base di Gröbner di $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$ (solite notazioni). Si ottiene:

$$\begin{array}{rclcl}
h_3 & = & \tau_{12} & = & (z, -xy, -1, 0), \\
h_2 & = & \tau_{13} & = & (y^2, -1, -x^2, 0), \\
h_1 & = & \tau_{14} & = & (y^4, -x^2z - y^2, 0, -x^3), \\
h_5 & = & \tau_{23} & = & (0, y^3, -xz, 1), \\
h_4 & = & \tau_{24} & = & (0, -xz^2 + y^5, 0, -x^2z + y^2), \\
h_6 & = & \tau_{34} & = & (0, -z, y^2, -x).
\end{array}$$

I termini direttivi rispetto al term order $\delta$ indotto da $(\sigma, \mathcal{G})$ dei vettori scritti sopra sono:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{LT}_\delta(h_1) & = & y^4\varepsilon_1; \\
\mathrm{LT}_\delta(h_2) & = & y^2\varepsilon_1; \\
\mathrm{LT}_\delta(h_3) & = & z\varepsilon_1; \\
\mathrm{LT}_\delta(h_4) & = & y^5\varepsilon_2; \\
\mathrm{LT}_\delta(h_5) & = & y^3\varepsilon_2; \\
\mathrm{LT}_\delta(h_6) & = & y^2\varepsilon_3.
\end{array}$$

(si noti che i nomi $h_1, \ldots, h_6$ sono stati dati in modo da avere i $\mathrm{LT}_\delta(h_1), \ldots, \mathrm{LT}_\delta(h_6)$ ordinati nell'ordinamento `PosLex` di $P^4$). Si noti ancora che, come previsto dalla dimostrazione data nel corso del teorema delle sizigie di Hilbert, i termini direttivi degli $h_i$ sono costituiti da monomi nelle sole variabili $y$ e $z$.

Fino a questo momento abbiamo quindi costruito la seguente sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \ker(\phi_1) \longrightarrow P^4 \xrightarrow{\phi_1} P \xrightarrow{\phi_0} N \longrightarrow 0$$

In particolare abbiamo costruito una presentazione del modulo $N$ data da: $P^4 \xrightarrow{\phi_1} P \xrightarrow{\phi_0} N \longrightarrow 0$.
Il modulo $\ker(\phi_1)$ è generato da 6 elementi, quindi consideriamo:

$$P^6 \xrightarrow{\phi_2} \ker(\phi_1) \longrightarrow 0$$

Abbiamo che $h_1, \ldots, h_6$ è una base di Gröbner per il modulo $\ker(\phi_1)$ e da essa quindi possiamo ottenere una base di Gröbner per $\ker(\phi_2)$. L'insieme delle coppie degli $h_i$ per cui si deve calcolare l'$S$-vettore è il seguente:

$$\mathbb{B} = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (4,5)\}$$

Le sizigie che si ottengono sono le seguenti sestuple:

$$\begin{array}{rcll} m_2 & = & (1, -y^2, 0, 0, 0, -x^2) & \text{nasce da} \quad h_1 - y^2 h_2; \\ m_1 & = & (z, 0, -y^4, -x, 0, -y^2) & \text{nasce da} \quad zh_1 - y^4 h_3; \\ m_3 & = & (0, z, -y^2, 0, -x, -1) & \text{nasce da} \quad zh_2 - y^2 h_3; \\ m_4 & = & (0, 0, 0, 1, -y^2, -xz) & \text{nasce da} \quad h_4 - y^2 h_5. \end{array}$$

Anche qui gli $m$ sono ordinati in modo da avere i termini direttivi ordinati nell'ordinamento `PosLex` di $P^6$. I termini direttivi per l'opportuno ordinamento indotto sono:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{LT}(m_1) & = & (z, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathrm{LT}(m_2) & = & (1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathrm{LT}(m_3) & = & (0, z, 0, 0, 0, 0); \\ \mathrm{LT}(m_4) & = & (0, 0, 0, 1, 0, 0). \end{array}$$

Come si vede, e come ci si deve aspettare, i termini direttivi sono fatti con termini che sono solo nella variabile $z$ (o costanti).

I vettori $m_1, \ldots, m_4$ sono una base di Gröbner (per un opportuno term order su $P^6$ indotto dal term order precedente) del modulo $\ker(\phi_2)$. Quindi abbiamo costruito la seguente sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \ker(\phi_2) \longrightarrow P^6 \xrightarrow{\phi_2} P^4 \xrightarrow{\phi_1} P \xrightarrow{\phi_0} N \longrightarrow 0$$

Il modulo $\ker(\phi_2)$ è generato da 4 elementi, quindi consideriamo:

$$P^4 \xrightarrow{\phi_3} \ker(\phi_2) \longrightarrow 0$$

e cerchiamo il $\ker(\phi_3)$.
Dalla base di Gröbner $m_1, \ldots, m_4$ di $\ker(\phi_2)$ possiamo ottenere una base di Gröbner di $\ker(\phi_3)$. Vale:

$$\mathbb{B} = \{(1,2)\}$$

La sizigia che si ottiene è la seguente:

$$p \quad = \quad (-1, z, y^2, -x) \quad \text{nasce da} \quad zm_2 - m_1$$

Vale:

$$\mathrm{LT}(p) = (1, 0, 0, 0)$$

e, come si vede, è un elemento di $\mathbb{Q}^4$ (quindi non contiene variabili). Come previsto dalla dimostrazione del teorema delle sizigie di Hilbert, sappiamo allora che $\ker(\phi_2)$ è un modulo libero e la sizigia $p$ di $m_1, \ldots, m_4$ dà la relazione:

$$(-1) \cdot m_1 + (z) \cdot m_2 + (y^2) \cdot m_3 + (-x) \cdot m_4 = 0$$

da cui si ricava che $m_1$ è combinazione lineare di $m_2, m_3$ e $m_4$ e tra $m_2, m_3$ e $m_4$ non ci sono relazioni (se ve ne fossero, dovrebbero comparire tra le sizigie). Quindi $m_2, m_3, m_4$ è una base di $\ker(\phi_2)$ e allora possiamo definire la mappa $\phi_3 : P^3 \longrightarrow P^6$ data da $\phi_3(f_1, f_2, f_3) = f_1 m_2 + f_2 m_3 + f_3 m_4$ la cui immagine è $\ker(\phi_2)$ e quindi otteniamo la seguente sequanza esatta (risoluzione libera di $N$):

$$0 \longrightarrow P^3 \xrightarrow{\phi_3} P^6 \xrightarrow{\phi_2} P^4 \xrightarrow{\phi_1} P \xrightarrow{\phi_0} N \longrightarrow 0$$

Si noti che la lunghezza di questa risoluzione libera di $N$ è 3, così come 3 è il numero di variabili dell'anello $P$.