Esempio di calcolo di sizigia di monomi

Sia $P = \mathbb{Q}[x, y]$, fissiamo il term order σ su P^2 dato da `PosLex`. Consideriamo i seguenti 3 elementi di P^2:

$$g_1 = (3xy^2, x^2 + 1), \quad g_2 = (2xy^2 - 1, xy - 1), \quad g_3 = (4x^2y, y^2)$$

che generano un modulo $M \subseteq P^2$. Vale:

$$\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = \big\{(3xy^2, 0), (2xy^2, 0), (4x^2y, 0)\big\}$$

La mappa Φ è data da:

$$\Phi : P^3 \longrightarrow P^2, \qquad \Phi(\varepsilon_1) = (3xy^2, 0),\ \Phi(\varepsilon_2) = (2xy^2, 0),\ \Phi(\varepsilon_3) = (4x^2y, 0)$$

Quindi

$$\mathrm{LM}_\sigma(g_1) = 3xy^2e_1, \quad \mathrm{LM}_\sigma(g_2) = 2xy^2e_1, \quad \mathrm{LM}_\sigma(g_3) = 4x^2ye_1,$$

Pertanto:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad \sigma_{13} = \frac{1}{3}x\,\varepsilon_1 - \frac{1}{4}y\,\varepsilon_3, \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}x\,\varepsilon_2 - \frac{1}{4}y\,\varepsilon_3$$

sono generatori omogenei di $\ker(\Phi) = \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$.

Consideriamo ora $m = \big(-3/2x^3 + 2x^2y^4\big)\,\varepsilon_2 + \big(3/4x^2y - xy^5\big)\,\varepsilon_3$. Calcolando $\Phi(m)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Phi(m) &= \Phi\left(\big(-3/2x^3 + 2x^2y^4\big)\,\varepsilon_2 + \big(3/4x^2y - xy^5\big)\,\varepsilon_3\right)\\
&= \big(-3/2x^3 + 2x^2y^4\big)\,\mathrm{LM}_\sigma(g_2) + \big(3/4x^2y - xy^5\big)\,\mathrm{LM}_\sigma(g_3)\\
&= -3/2x^3 \cdot 2xy^2e_1 + 2x^2y^4 \cdot 2xy^2e_1 + 3/4x^2y \cdot 4x^2ye_1 - xy^5 \cdot 4x^2ye_1\\
&= -3x^4y^2\,e_1 + 4x^3y^6\,e_1 + 3x^4y^2\,e_1 - 4x^3y^6\,e_1 = 0
\end{aligned}$$

Allora $m \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ e pertanto si deve poter scrivere some combinazione lineare di $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$. Si noti inoltre che m è, nella $T\langle e_1, e_2\rangle$ graduazione, somma di due componenti omogenee, e precisamente le componenti omogenee di m sono:

$$m_1 = -3/2x^3\,\varepsilon_2 + 3/4x^2y\,\varepsilon_3 \quad \text{e} \quad m_2 = 2x^2y^4\,\varepsilon_2 - xy^5\,\varepsilon_3$$

dove:

$$m_1 \in (P^3)_{x^4y^2\,e_1} \quad \text{e} \quad m_2 \in (P^3)_{x^3y^6\,e_1}$$

Si noti anche che, essendo Φ graduato, deve essere $\Phi(m_1) = 0$ e $\Phi(m_2) = 0$. In particolare m_1 si deve scrivere come combinazione lineare di $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$. Seguendo la dimostrazione del teorema sulle sizigie di monomi, abbiamo che ad m_1 dobbiamo sottrarre σ_{23} moltiplicato per $3x^2$. In questo caso si vede sutito che $m_1 - 3x^2\sigma_{23} = 0$. Analogamente per m_2.