Esempio: risoluzione di sistemi lineari in $K[x_1, \ldots, x_n]$

Risolvere il sistema lineare (in $T_1, T_2, T_3$):

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} (x^2 - y)T_1 & + & (xy-1)T_2 & + & xy^2 T_3 & = & -x^2y^3 + 2xy^3 + x^3 - xy - 2y^2 \\ xyT_1 & & & + & (x^2y + x)T_3 & = & -x^3y^2 \end{array} \right.$$

I coefficienti del sistema lineare sono in $P = \mathbb{Q}[x, y]$.

Considero il modulo $M \subseteq P^3$ generato da:

$$h_1 = (x^2 - y, xy),\ h_2 = (xy - 1, 0),\ h_3 = (xy^2, x^2y + x);$$

Si tratta innanzitutto di vedere se il vettore

$$b = (-x^2y^3 + 2xy^3 + x^3 - xy - 2y^2, -x^3y^2)$$

sta in $M$.

La base di Gröbner di $M$ (rispetto all'ordinamento `DegRevLexPos` sui monomi di $P^3$, cioè su $T\langle e_1, e_2, e_3\rangle$) è:

$$G = \left\{ (xy - 1, 0),\ (x^2 - y, xy),\ (-\frac{1}{2}y^3 - y^2 + x, 0),\ (\frac{1}{2}y, x) \right\}$$

Detto $\mathcal{H} = (h_1, h_2, h_3)$ e $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ (dove $g_1, \ldots, g_4$ sono gli elementi di $G$), dall'algoritmo di divisione e dall'algoritmo di Buchberger si possono costruire due matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che $\mathcal{G} = \mathcal{H}\mathcal{A}$ e $\mathcal{H} = \mathcal{G}\mathcal{B}$. Le matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}(xy^2 + y) & \frac{1}{2}(x^2y - x) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}(x^2y - y^3 - y^2 + 2x) & -\frac{1}{2}(x^3 - xy^2 - xy + y) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}y^2 & -\frac{1}{2}xy + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xy + 1 \end{pmatrix}$$

Dalla base di Gröbner $G$ si può stabilire che $b \in M$: infatti calcolando la forma normale di $b$ rispetto a $G$ si ottiene 0. Dalla riduzione (algoritmo di divisione) si trova inoltre che

$$b = (-\frac{1}{2}xy^2 + 2y^2)g_1 + xg_2 - (x^2y^2 + xy)g_4$$

Da questa rappresentazione di $b$ e dalla matrice $\mathcal{A}$ che permette di esprimere i $g$ in funzione dei generatori $h$ si ottiene:

$$b = xh_1 + 2y^2h_2 - xyh_3$$

e quindi abbiamo una soluzione del sistema lineare, che è:

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & x \\ T_2 & = & 2y^2 \\ T_3 & = & -xy \end{array}$$

Per avere tutte le soluzioni del sistema lineare, dobbiamo trovare il modulo delle sizigie di $h_1, h_2, h_3$.

Dalla base di Gröbner $G$ possiamo ottenere i generatori del modulo $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$, che sono le colonne della seguente matrice:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x & y^2+2y \\ -y & -2 \\ 1 & 2x \\ y^2 & 2y \end{pmatrix}$$

Pertanto i generatori del modulo delle sizigie di $\mathcal{H}$ sono le colonne della matrice:

$$(\mathcal{AM} \mid \mathcal{I}_t - \mathcal{AB})$$

e cioè sono:

$$\begin{aligned} s_1 &= (1/2x^2y^3 - 1/2y, \\ &\quad -1/2x^3y^2 + 1/2xy^4 + 1/2xy^3 - 1/2x^2y + 1/2y^2, \\ &\quad -1/2xy^3 + 1/2y^2) \\ s_2 &= (2x^2y^2 - 2, -2x^3y + 2xy^3 + 2xy^2 - 2x^2 + 2y, \\ &\quad -2xy^2 + 2y) \\ s_3 &= -1/2x^3y^2 + 1/2x, \\ &\quad 1/2x^4y - 1/2x^2y^3 - 1/2x^2y^2 + 1/2x^3 - 1/2xy, \\ &\quad 1/2x^2y^2 - 1/2xy \end{aligned}$$

Abbiamo allora trovato che tutte le soluzioni del sistema lineare di partenza sono date da:

$$(T_1, T_2, T_3) = (x, 2y^2, -xy) + f_1s_1 + f_2s_2 + f_3s_3$$

dove $f_1, f_2, f_3 \in P$. Infine, se si volesse sapere in quanti modi diversi può essere scritta in questo modo una soluzione, si dovrebbero calcolare le sizigie di $(s_1, s_2, s_3)$.