Esempi di funzioni e serie di Hilbert

Ideale omogeneo $I = (x^2y - z^3, xyz^3 - t^5, zt^2 - t^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z, t]$.
Ordinamento σ: lessicografico puro in cui $x > y > z > t$. Base di Gröbner ridotta:

$$\begin{array}{llll} zt^2 - t^3, & x^2y - z^3, & xyz^3 - t^5, & xt^5 - z^6, \\ z^7 - z^6t, & yz^6 - t^7, & yt^8 - t^9 & \end{array}$$

$$\mathrm{LT}_\sigma(I) = (zt^2, x^2y, xyz^3, xt^5, z^7, yz^6, yt^8)$$

Ordinamento σ: lessicografico puro in cui $t > z > y > x$. Base di Gröbner ridotta:

$$\begin{array}{llll} t^3 - zt^2, & z^3 - x^2y, & x^2yt^2 - x^3y^2, & x^3y^2t - x^3y^2z, \\ x^3y^2z^2 - x^4y^3, & x^4y^3z - x^5y^3, & x^5y^4 - x^6y^3 & \end{array}$$

$$\mathrm{LT}_\sigma(I) = (t^3, z^3, x^2yt^2, x^3y^2t, x^3y^2z^2, x^4y^3z, x^5y^4)$$

Ordinamento σ: deg-lex in cui $x > t > z > y$. Base di Gröbner ridotta:

$$\begin{array}{llll} t^3 - t^2z, & x^2y - z^3, & xz^3y - t^2z^3, & xt^2z^3 - z^6, \\ t^2z^5 - z^6y, & tz^6 - z^7, & z^8 - z^7y & \end{array}$$

$$\mathrm{LT}_\sigma(I) = (t^3, x^2y, xz^3y, xt^2z^3, t^2z^5, tz^6, z^8)$$

Funzione di Hilbert :

$$\begin{array}{rcl} H_I(0) & = & 0 \\ H_I(1) & = & 0 \\ H_I(2) & = & 0 \\ H_I(3) & = & 2 \\ H_I(4) & = & 8 \\ H_I(5) & = & 21 \\ H_I(6) & = & 43 \\ H_I(7) & = & 76 \\ H_I(Z) & = & 1/6Z^3 + Z^2 + 11/6Z - 44 \quad \text{se } Z \geq 8 \end{array}$$

Serie di Hilbert:

$$\mathrm{HS}_I(Z) = \frac{2Z^3 + Z^5 - Z^6 - 2Z^8 + Z^{11}}{(1 - Z)^4}$$

Espandendo la serie $\mathrm{HS}_I(Z)$ si ottiene:

$$\mathrm{HS}_I(Z) = 2Z^3 + 8Z^4 + 21Z^5 + 43Z^6 + 76Z^7 + 120Z^8 + 175Z^9 + 241Z^{10} + \cdots$$

Modulo $M \subseteq P(-3)^2 \oplus P(-4)^2$ graduato, generato da:

$$(z, -x, 0, 0), (0, yz, -x, 0), (0, 0, z^2, -y^2), (0, z^3, 0, -xy)$$

Base di Gröbner di M rispetto all'ordinamento σ: `PosLex`:

$$(z,-x,0,0),(0,0,z^2,-y^2),(0,yz,-x,0),(0,z^3,0,-xy)$$

$$\mathrm{LT}(M)=\langle(z,0,0,0),(0,0,z^2,0),(0,yz,0,0),(0,z^3,0,0)\rangle$$

Pertanto

$$\mathrm{LT}(M)=(z)e_1\oplus(yz,z^3)e_2\oplus(z^2)e_3$$

e la funzione di Hilbert di M vale:

$$\begin{array}{rcl} H_M(3) &=& 0 \\ H_M(4) &=& 1 \\ H_M(Z) &=& 3/2Z^2-19/2Z+14 \quad \text{per } Z\geq 5 \end{array}$$

Per giustificare questo risultato, si noti che nella gradazione scelta, e_1 ed e_2 hanno grado 3, mentre e_3 (ed e_4) hanno grado 4. Pertanto

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{LT}(M))_d=\dim_{\mathbb{Q}}(z)_{d-3}+\dim_{\mathbb{Q}}(yz,z^3)_{d-3}+\dim_{\mathbb{Q}}(z^2)_{d-4}$$

e vale, per δ sufficientemente grande:

$$\begin{array}{rcl} \dim_{\mathbb{Q}}(z)_\delta &=& (\delta^2+\delta)/2, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(yz,z^3)_\delta &=& (\delta^2+\delta)/2-2, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(z^2)_\delta &=& (\delta^2-\delta)/2 \end{array}$$

Infine, la serie di Hilbert di M è:

$$HS_M(Z)=\frac{Z^4+Z^5+2Z^6-Z^7}{(1-Z)^3}$$