

CALCOLO DI UNA BASE DI GRÖBNER

Algoritmo di Buchberger

Input: $g_1, \dots, g_s \in P^r$, t.o. σ ;

Output: \mathcal{G} , σ -base di Gröbner di $M = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subseteq P^r$.

Sia $\text{LM}_\sigma(g_i) = c_i t_i e_{\gamma_i}$

$s' = s$; $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_s)$

$B = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq s, \gamma_i = \gamma_j\}$;

while $B \neq \emptyset$ do

 scegli $(i, j) \in B$;

$B = B \setminus \{(i, j)\}$;

$S_{ij} = \phi(\sigma_{ij}) = \frac{1}{c_i} t_{ij} g_i - \frac{1}{c_j} t_{ji} g_j$;

 Calcola $\text{NR}_{\sigma, \mathcal{G}}(S_{ij})$, il ridotto di S_{ij} rispetto a \mathcal{G} ;

 if $\text{NR}_{\sigma, \mathcal{G}}(S_{ij}) \neq 0$ then

$s' = s' + 1$;

$g_{s'} = \text{NR}_{\sigma, \mathcal{G}}(S_{ij})$;

$\mathcal{G} = \mathcal{G}, g_{s'}$;

$B = B \cup \{(i, s') \mid 1 \leq i < s', \gamma_i = \gamma_{s'}\}$;

 end if;

end while;

return \mathcal{G} .

ESEMPIO

Sia $P = \mathbb{Q}[x, y]$ e sia $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ con $g_1, g_2, g_3 \in P^2$ definiti da:

$$g_1 = (x^2y - 1, 0), \quad g_2 = (xy^2 - 1, x), \quad g_3 = (0, xy + 1)$$

Sui termini $\mathbb{T}\langle e_1, e_2 \rangle$ di P^2 definiamo il term order σ dato da PosLex, quindi $t_1 e_i <_\sigma t_2 e_j$ se $i > j$ o, se $i = j$, allora se $t_1 <_{\text{Lex}} t_2$. Pertanto vale:

$$\text{LM}_\sigma(g_1) = x^2y e_1, \quad \text{LM}_\sigma(g_2) = xy^2 e_1, \quad \text{LM}_\sigma(g_3) = xye_2$$

Calcolo della base di Gröbner con l'algoritmo di Buchberger:

$s' = 3$; $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$

$B = \{(1, 2)\}$

scegliamo $(1, 2) \in B$;

$B = \emptyset$

$S_{12} = (x - y, -x^2)$. S_{12} è ridotto modulo \mathcal{G} . Pertanto:

$s' = 4$; $g_4 = (x - y, -x^2)$; $\mathcal{G} = \mathcal{G}, g_4$;

$B = \{(1, 4), (2, 4)\}$;

Scegliamo $(1, 4) \in B$;

$B = \{(2, 4)\}$;

$S_{14} = (xy^2 - 1, x^3y)$; La riduzione con \mathcal{G} dà:

$S_{14} - g_2 - x^2g_3 = (0, -x^2 - x)$; pertanto $s' = 5$, $g_5 = (0, -x^2 - x)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}, g_5$;

$B = \{(2, 4), (3, 5)\}$

Scegliamo $(2, 4) \in B$;

$$B = \{(3, 5)\};$$

$S_{24} = (y^3 - 1, x^2y^2 + x)$; La riduzione con \mathcal{G} dà:

$S_{24} - xyg_3 + g_3 = (y^3 - 1, x + 1)$; pertanto $s' = 6, g_6 = (y^3 - 1, x + 1), \mathcal{G} = \mathcal{G}, g_6$;

$$B = \{(3, 5), (1, 6), (2, 6), (4, 6)\}$$

Scegliamo $(3, 5) \in B$;

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (4, 6)\}$$

$S_{35} = (0, -xy + x)$; La riduzione con \mathcal{G} dà:

$S_{35} + g_3 = (0, x + 1)$; pertanto $s' = 7, g_7 = (0, x + 1), \mathcal{G} = \mathcal{G}, g_7$;

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (4, 6), (3, 7), (5, 7)\}$$

Scegliamo $(5, 7) \in B$

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (4, 6), (3, 7)\}$$

$$S_{57} = 0$$

Scegliamo $(3, 7) \in B$

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (4, 6)\}$$

$S_{37} = (0, -y + 1)$; è ridotto rispetto a \mathcal{G}

$s' = 8, g_8 = (0, -y + 1), \mathcal{G} = \mathcal{G}, g_8$;

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (4, 6), (3, 8), (5, 8), (7, 8)\}$$

Da qui in poi si vede che la forma ridotta di S_{ij} vale sempre 0 per ogni $(i, j) \in B$.

Pertanto una σ -base di Gröbner del modulo M è data da:

$$\begin{aligned} g_1 &= (x^2y - 1, 0), & g_2 &= (xy^2 - 1, x), & g_3 &= (0, xy + 1), & g_4 &= (x - y, -x^2) \\ g_5 &= (0, -x^2 - x), & g_6 &= (y^3 - 1, 1 + x), & g_7 &= (0, x + 1), & g_8 &= (0, -y + 1) \end{aligned}$$

Dal procedimento usato per il calcolo della base di Gröbner $\{g_1, \dots, g_8\}$ con l'algoritmo di Buchberger, si vede anche come ottenere ciascun g_i come combinazione lineare dei generatori di partenza (cioè di g_1, g_2, g_3). Ad esempio g_4 è stato ottenuto da S_{12} , cioè $g_4 = yg_1 - xg_2$, mentre $g_5 = S_{14} - g_2 - x^2g_3$, quindi $g_5 = g_1 - xy(yg_1 - xg_2) - g_2 - xyg_3$, cioè $g_5 = (-xy^2 + 1)g_1 + (x^2y - 1)g_2 + (-x^2)g_3$. In questo modo si vede che, se chiamiamo \mathcal{H} la matrice 1×3 la cui riga è costituita dai generatori $h_1 = g_1, h_2 = g_2, h_3 = g_3$ del modulo M e \mathcal{G} la matrice 1×8 costituita dalla base di Gröbner g_1, \dots, g_8 , si può costruire una matrice $8 \times 3, \mathcal{A}$, ad entrate polinomiali, tale che

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{A}$$

La matrice \mathcal{A} vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y & -xy^2 + 1 & -y^3 & -xy^3 + y & xy^4 - y^2 \\ 0 & 1 & 0 & -x & x^2y - 1 & xy^2 + 1 & x^2y^2 - y & -x^2y^3 + y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x^2 & -xy + 1 & -x^2y + x + 1 & x^2y^2 - xy - y + 1 \end{pmatrix}$$

Base di Gröbner minimale

I leading term della base di Gröbner scritta sopra sono:

$$\begin{aligned} \text{LT}_\sigma(g_1) &= x^2ye_1, & \text{LT}_\sigma(g_2) &= xy^2e_1, & \text{LT}_\sigma(g_3) &= xye_2, & \text{LT}_\sigma(g_4) &= xe_1, \\ \text{LT}_\sigma(g_5) &= x^2e_2, & \text{LT}_\sigma(g_6) &= y^3e_1, & \text{LT}_\sigma(g_7) &= xe_2, & \text{LT}_\sigma(g_8) &= ye_2. \end{aligned}$$

Come si vede, alcuni leading term sono multipli di altri (ad esempio $\text{LT}_\sigma(g_1)$ e $\text{LT}_\sigma(g_2)$ sono multipli di $\text{LT}_\sigma(g_4)$, mentre $\text{LT}_\sigma(g_3)$ è multiplo di $\text{LT}_\sigma(g_7)$). Se dalla base di Gröbner g_1, \dots, g_8 togliamo quegli elementi i cui leading term sono multipli di altri, otteniamo ancora una base di Gröbner di M . Quindi gli elementi che rimangono in questo esempio sono: g_4, g_6, g_7, g_8 . Questa è una base di Gröbner minimale di M , in accordo con la:

Definizione: una base di Gröbner g_1, \dots, g_s si dice *minimale* se $\text{LT}_\sigma(g_i)$ non è multiplo di $\text{LT}_\sigma(g_j)$ per ogni $i \neq j$ e se $\text{LC}_\sigma(g_i) = 1$ per ogni i .

Infine si noti che alcuni elementi della base $\{g_4, g_6, g_7, g_8\}$ possono essere ridotti rispetto agli altri. Ad esempio g_6 può essere ridotto rispetto a g_7 (infatti $g_6 \rightarrow_{\{g_7\}} (y^3 - 1, 0) = g_6 - g_7$) e così pure g_4 si può ridurre con g_7 (infatti $g_4 \rightarrow_{\{g_7\}} (x - y, -1) = g_4 + xg_7 - g_7$). Si ottengono così i seguenti elementi di P^2 :

$$\bar{g}_1 = (0, x + 1), \quad \bar{g}_2 = (0, y - 1), \quad \bar{g}_3 = (x - y, -1), \quad \bar{g}_4 = (y^3 - 1, 0)$$

che sono ancora una base di Gröbner di M (perchè i loro LT_σ non sono stati alterati) e formano una base di Gröbner ridotta, in accordo con la:

Definizione: una base di Gröbner g_1, \dots, g_s si dice *ridotta* se è minimale e se g_i è ridotto modulo $\{g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_s\}$, per ogni $i = 1, \dots, s$.

Si può dimostrare che da ogni base di Gröbner si può estrarre una base di Gröbner ridotta e la base di Gröbner ridotta è unica (per un fissato ordinamento).

Seguendo i calcoli che hanno permesso di ottenere la base di Gröbner ridotta a partire da $\{g_1, \dots, g_8\}$, si può anche ora trovare una matrice, chiamiamola ancora \mathcal{A} , tale che $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{A}$, dove ora $\bar{\mathcal{G}} = \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_4$. La matrice \mathcal{A} che si trova è:

$$\begin{pmatrix} -xy^3+y & -xy^4+y^2 & xy^3+xy^2-1 & xy^3-y^3-y \\ x^2y^2-y & x^2y^3-y^2 & -x^2y^2-x^2y-x+y+1 & -x^2y^2+xy^2+y+1 \\ -x^2y+x+1 & -x^2y^2+xy+y-1 & x^2y+x^2-x-1 & x^2y-xy-x \end{pmatrix}$$

Infine, poiché gli elementi di \mathcal{H} (che sono i generatori di M) sono ovviamente elementi di M , devono ridursi a 0 con la base di Gröbner $\bar{\mathcal{G}}$, pertanto, applicando l'algoritmo di divisione, si ottiene, ad esempio: $h_1 = y\bar{g}_1 + y\bar{g}_2 + (xy + y^2)\bar{g}_3 + \bar{g}_4$ e così per tutti gli altri. In questo modo si può costruire una matrice 4×3 , \mathcal{B} , tale che $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{B}$. La matrice \mathcal{B} vale:

$$\begin{pmatrix} y & 1 & y \\ y & y+1 & -1 \\ xy+y^2 & y^2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la base di Gröbner $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4\}$ scritta sopra. Poiché è una base di Gröbner, per il criterio di Buchberger l' S -vettore di \bar{g}_i e \bar{g}_j (quando è definito) deve ridursi a zero con $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4\}$. Infatti si trova, con S_{12} : $(y-1)\bar{g}_1 - (x+1)\bar{g}_2 = 0$ da cui si costrisce la sizigia $\tau_{12} = (y-1)\varepsilon_1 - (x+1)\varepsilon_2$, analogamente, con S_{34} si ottiene: $(y^2+y+1)\bar{g}_2 + (y^3-1)\bar{g}_3 + (-x+y)\bar{g}_4 = 0$, da

cui la sизigia $\tau_{34} = (y^2 + y + 1)\varepsilon_2 + (y^3 - 1)\varepsilon_3 + (-x + y)\varepsilon_4$ e quindi, per il teorema di Schreyer, τ_{12}, τ_{34} è una δ -base di Gröbner del modulo $\text{Siz}(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4)$ (dove δ è il term-order definito nel teorema di Schreyer).