Algoritmo di divisione

`Input:` $m, \quad g_1, \ldots, g_s;$
`Output:` $(q_1, \ldots, q_s) \in P^s, \quad p \in P^r$ tali che $m = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + p;$

$v := m; \quad q_1 := 0, \ldots, q_s := 0, \quad p := 0$
`while` $v \neq 0$ `do`
  `while` (esiste $i \in \{1, \ldots, s\}$ tale che $\mathrm{LM}(v)$ è multiplo di $\mathrm{LM}(g_i)$) `do`
    scegli i minimo;
    $q_i := q_i + \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)};$
    $v := v - \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)} g_i;$
  `end while`;
  $p := p + \mathtt{LM}(v);$
  $v := v - \mathtt{LM}(v);$
`end while`;
`return` $(q_1, \ldots, q_s), \quad p.$

Esempio: Anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x, y]$ ordinamento `Lex`.

$$
\begin{aligned}
m &:= 2\,x^6 y + x^4 y^2 - 2\,x^3 y + x^2 y^3 + 2\,xy^3 + xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1 \\
g_1 &:= x^3 y - y; \\
g_2 &:= xy^2 - xy
\end{aligned}
$$

I polinomi scritti sono ordinati rispetto a `Lex`.
Esecuzione algoritmo:

$$
\begin{aligned}
v &:= 2\,x^6 y + x^4 y^2 - 2\,x^3 y + x^2 y^3 + 2\,xy^3 + xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1; \\
q_1 &:= 0; \quad q_2 := 0; \\
p &:= 0;
\end{aligned}
$$

$\mathtt{LM}(v) = 2\,x^6 y$ è multiplo di $\mathtt{LM}(g_1) = x^3 y$, quindi:

$$
\begin{aligned}
i &:= 1; \\
q_1 &:= 2x^3 \\
v &:= x^4 y^2 + x^2 y^3 + 2\,xy^3 + xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1
\end{aligned}
$$

Ora $\mathtt{LM}(v) = x^4 y^2$ è multiplo sia di $\mathtt{LM}(g_1) = x^3 y$, sia di $\mathtt{LM}(g_2) = xy^2$, scegliamo i minimo, quindi:

$$
\begin{aligned}
i &:= 1; \\
q_1 &:= 2x^3 + xy; \\
v &:= x^2 y^3 + 2\,xy^3 + 2\,xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1.
\end{aligned}
$$

Ora $\mathtt{LM}(v) = x^2 y^3$, quindi va ridotto con g_2:

$$
\begin{aligned}
i &:= 2; \\
q_2 &:= xy; \\
v &:= x^2 y^2 + 2\,xy^3 + 2\,xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1.
\end{aligned}
$$

Ora $\mathtt{LM}(v) = x^2y^2$, quindi v va ridotto con g_2:

$$\begin{aligned} i &:= 2; \\ q_2 &:= xy + x; \\ v &:= x^2y + 2\,xy^3 + 2\,xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1 \end{aligned}$$

A questo punto $\mathtt{LM}(v)$ non è più multiplo né di $\mathtt{LM}(g_1)$ né di $\mathtt{LM}(g_2)$, quindi si esce dal ciclo più interno dell'algoritmo e si procede riassegnando v e p:

$$\begin{aligned} p &:= x^2y; \\ v &:= 2\,xy^3 + 2\,xy^2 - 4\,xy + 4\,x + 1 \end{aligned}$$

Ora $\mathtt{LM}(v) = 2xy^3$ è nuovamente multiplo del $\mathtt{LM}(g_2)$, quindi si rientra nel ciclo più interno dell'algoritmo (che si esegue due volte):

$$\begin{aligned} i &:= 2; \\ q_2 &:= xy + x + 2y; \\ v &:= 4xy^2 - 4xy + 4x + 1. \end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} i &:= 2; \\ q_2 &:= xy + x + 2y + 4; \\ v &:= 4x + 1. \end{aligned}$$

Si esce ora dal ciclo più interno e si eseguono le istruzioni:

$$\begin{aligned} p &:= x^2y + 4x; \\ v &:= 1 \end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned} p &:= x^2y + 4x + 1; \\ v &:= 0; \end{aligned}$$

La risposta dell'algoritmo è pertanto:

$$\begin{aligned} q_1 &:= 2x^3 + xy; \\ q_2 &:= xy + x + 2y + 4; \\ p &:= x^2y + 4x + 1. \end{aligned}$$