Algebra 2
Corso di laurea in Matematica

4 settembre 2013

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$. Provare che allora esiste un $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ed esiste un polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ monico, tale che $f(a\alpha) = 0$.

2. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_5[x, y]$ che contengono i polinomi $x^2 + 1$ e $y^3 + 2y + 1$.

3. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ e $F : A \longrightarrow A$ data da $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $F(x) = 3x + 5$ (e poi estesa nell'unico modo possibile). Provare che F è un automorfismo di A. Mostrare poi che il polinomio $(3x + 5)^n + 2$ è irriducibile per ogni intero $n \geq 1$.

4. Sia $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ un ideale tale che $L = \mathbb{R}[x]/I$ è un campo e sia $\pi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]/I$ la proiezione canonica. Provare che, detto $K = \pi(\mathbb{R})$, K è un campo contenuto in L. Quali sono i possibili valori che può assumere $[L : K]$?