Algebra 2
Corso di laurea in Matematica

21 gennaio 2014

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Provare che a è algebrico su $\mathbb{Q}$ se e solo se $\sqrt[3]{a}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.
2. Trovare tutti gli elementi invertibili e tutti i divisori dello zero dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$.
3. Sia A un anello commutativo unitario e siano I, J due ideali di A tali che $I + J = (1)$. Provre che l'anello quoziente $A/(I \cap J)$ è isomorfo all'anello prodotto $A/I \times A/J$.
4. Provare che il polinomio $(a^2 + 2a - 1)x^7 + (a - 1)x^2 + a^2 - a \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile per infiniti valori di $a \in \mathbb{Z}$.