

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**

15 giugno 2011

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Provare che l'ideale  $(x - 1, x + y - 2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$  è un ideale massimale.
2. Sia  $K = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ . Provare che  $K$  è un campo. Provare poi che l'elemento  $a = [x + 1] \in K$  è algebrico su  $\mathbb{Z}_2$  e trovare il suo polinomio minimo (sempre su  $\mathbb{Z}_2$ ).
3. Usando l'algoritmo di Berlekamp, dire quanti sono i fattori irriducibili di  $4x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ .
4. Sia  $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3)$ . Descrivere tutti i divisori dello zero di  $A$ .