

Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

12 novembre 2014

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia $a \in \mathbb{R}$ algebrico su \mathbb{Q} di grado 4 (cioè il polinomio minimo di a su \mathbb{Q} è di grado 4). Provare che $a^2 + 1$ è anche algebrico su \mathbb{Q} . Che grado può avere $a^2 + 1$ su \mathbb{Q} ? (Dare un esempio per ogni possibile grado trovato).
2. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
3. Si consideri l'ideale $I = (x + 1, y^3 + 1) \subseteq \mathbb{Z}_3[x, y]$. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_3[x, y]$ che contengono I .
4. Sia $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_5$ l'anello prodotto. Trovare tutti gli elementi invertibili e tutti i divisori dello zero di A .