Algebra 2

Esercizi riassuntivi/3

1. Sia K un campo algebricamente chiuso. Provare che K ha infiniti elementi.

2. Sia X un insieme qualunque e sia $A = \{ f \mid f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \}$ (cioè A è l'insieme di tutte le applicazioni da X in $\mathbb{Z}_3$). Su A si definisca una somma e un prodotto al solito modo, cioè, se $f, g \in A$, allora $f + g$ è quell'applicazione tale che $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x \in X$ e analogamente $f \cdot g$. In questo modo A diventa un anello (saltare pure al verifica). Trovare la caratteristica di A. Supponiamo poi che X sia fatto da due soli elementi. Provare che A e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ sono isomorfi come anelli.

3. Sia $f = x^{15} + 3x^{10} + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili.

4. Sia K un campo perfetto di caratteristica p e $f \in K[x]$. Supponiamo che $D^2(f) = 0$ (dove $D^2(f) = D(D(f))$ e D è l'operazione di derivazione). Come è fatto il polinomio f?

5. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Provare che K è un campo; trovare la sua caratteristica; dire se K è anche perfetto.

6. Siano K_1 e K_2 due campi e sia $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$ un omomorfismo (di anelli). Se K_1 ha caratteristica p, quanto vale la caratteristica di K_2? E se K_2 ha caratteristica p, cosa si può dire della caratteristica di K_1?