Algebra 2

Esercizi riassuntivi/1

1. Siano A, B due anelli commutativi, unitari. Sull'insieme $A \times B$ si definiscano somma e prodotto "per componenti", cioè:

$$(a,b)+(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (a+c,\ b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (a\cdot c,\ b\cdot d)$$

   Provare che $(A \times B,\ +,\ \cdot)$ è un anello commutativo unitario.

2. Sia $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Dati $f, g \in A$ si definisca $f+g$ con la legge: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e analogamente si definisca $f \cdot g$. Provare che $(A,\ +,\ \cdot)$ è un anello commutativo unitario.

3. Sia $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{con } f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \in [0,1]\}$ (dove, "per quasi ogni..." significa "per tutti, tranne per un numero finito ..."). Dati $f, g \in A$, si definisca $f+g$ e $f \cdot g$ come nell'esercizio 2. $(A,\ +,\ \cdot)$ è un anello commutativo unitario?

4. Provare che se $I \subseteq A$ è un ideale dell'anello A, allora il prodotto $[a]\cdot[b] = [a\cdot b]$ è ben definito in A/I.

5. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Provare che vale:

$$(a,b) = (\operatorname{mcd}(a,b))$$

   (dove (a,b) indica l'ideale generato da a e b).

6. Sia A definito come nell'esercizio 2. Dire chi sono gli elementi invertibili (unitari) di A. Dire chi sono i divisori dello zero di A.

7. Sia C l'anello "prodotto", definito nell'esercizio 1. Si assuma inoltre che A e B siano domini di integrità. Trovare tutti i divisori dello zero di C.

8. Siano I, J due ideali di un anello A. Sia $X = I \cup J$. Provare che vale:

$$(X) = \{a+b \mid a \in I,\ b \in J\}$$

   (dove, al solito, (X) indica l'ideale generato da X). In questo caso l'ideale (X) si indica con $I+J$ e si dice *ideale somma* di I e J.

9. Trovare un esempio che dimostri che $I+J$ non coincide con $I \cup J$.

10. Sia A un anello e $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di ideali di A tale che $I_k \subseteq I_{k+1}$. Provare che allora

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

   è un ideale di A.