Algebra 2

Esercizi riassuntivi/4

1. In $\mathbb{Z}_7[x]$ si consideri il polinomio
$$f = ax^{12} + (a+b+1)x^9 + (a+b^2)x^7 + 3x + 2a + b, \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{Z}_7$$
Per quali valori di a e di b esiste un polinomio $g \in \mathbb{Z}_7[x]$ tale che $f = g^7$?

2. Sia K un campo di caratteristica 0. Sia $f \in K[x]$ e si supponga che $f = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$ sia la decomposizione di f in fattori irriducibili ($\alpha_i \geq 1$, q_1 e q_2 distinti). Calcolare $\operatorname{mcd}(f, D(f))$.
Generalizzare il risultato trovato al caso in cui il polinomio f si decompone in $q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$. Se K non ha caratteristica 0, cosa può succedere?

3. Provare che in $\mathbb{Q}[x]$ ci sono infiniti polinomi irriducibili monici, di grado 3 e la cui derivata è un polinomio riducibile e ci sono anche infiniti polinomi monici irriducibili, di grado 3, la cui derivata è irriducibile.

4. Siano $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ primi tra loro. Provare che $\mathbb{Q}[x]/(fg)$ è isomorfo, come anello, all'anello prodotto $\mathbb{Q}[x]/(f) \times \mathbb{Q}[x]/(g)$.

5. Usando il metodo di fattorizzazione di Berlekamp, trovare i fattori irriducibili di $x^5 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

6. Sia $h \in \mathbb{Z}_p[x]$ (con p numero primo). Calcolare
$$\prod_{i \in \mathbb{Z}_p} (h + qi)$$
(dove q è un numero primo con p).

7. Provare che l'ideale $I = (x, y+1, z^2-2)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x, y, z]$. Provare che invece I non è massimale in $\mathbb{R}[x, y, z]$. Trovare infine tutti gli ideali massimali $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$ tali che $I \subseteq \mathcal{M}$.