Algebra 2

Esercizi riassuntivi/2

1. Sia A un anello (commutativo, unitario), $A[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in A e $F : A[x] \longrightarrow A[x]$ data da $F(a) = a$ per ogni $a \in A$, $F(x) = x + 1$ (e poi estesa nell'unico modo possibile che la rende omomorfismo di anelli). Provare che F è un automorfismo di $A[x]$.

2. Siano A, B anelli (commutativi, unitari), $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e $\Phi : A[x] \longrightarrow B[x]$ ottenuta da $\Phi(a) = \phi(a)$ per ogni $a \in A$ e $\Phi(x) = x$. Provare:

   - se ϕ è iniettiva, allora Φ è iniettiva;
   - se ϕ è suriettiva, allora Φ è suriettiva;
   - Φ è un isomorfismo se e solo se ϕ è un isomorfismo.

3. Sia A un anello (commutativo, unitario) e $I \subseteq A$ un ideale di A. Sia poi J l'ideale generato da I nell'anello $A[x]$. Provare che vale:

   $$J = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in I\}$$

   (cioè J risulta l'insieme di tutti i polinomi di $A[x]$ a coefficienti in I). L'ideale J si indica solitamente con $I[x]$.

4. Siano A, B anelli (commutativi, unitari), $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e $\Phi : A[x] \longrightarrow B[x]$ ottenuta da $\Phi(a) = \phi(a)$ per ogni $a \in A$ e $\Phi(x) = x$. Provare che $\ker(\Phi) = \ker(\phi)[x]$ (usando la notazione introdotta nell'esercizio 3).

5. Sia A un anello (commutativo, unitario) e $I \subseteq A$ un ideale di A. Provare che vale:

   $$\frac{A[x]}{I[x]} \cong \frac{A}{I}[x]$$

6. Sia K un campo, $\alpha \in K$ un elemento fissato e sia $v : K[x] \longrightarrow K$ l'omomorfismo di valutazione tale che $v(x) = \alpha$ (cioè $v(f(x)) = f(\alpha)$). Trovare $\ker(v)$.

7. Siano $f = x^3 - x$ e $g = x^4 - x^3 + 3x - 3$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Calcolare il massimo comun divisore d di f e g e trovare poi due polinomi $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = af + bg$.