

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**  
**Prova scritta**

26 gennaio 2011

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Trovare la fattorizzazione del polinomio  $x^{16} + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ .
2. Sia  $A$  un anello tale che soddisfa alla proprietà:

$$\text{per ogni } a \in A \text{ esiste un numero } n \in \mathbb{N}, n > 1, \text{ tale che } a^n = a \quad (1)$$

Provare che allora ogni ideale primo di  $A$  è anche massimale. Dare alcuni esempi di anelli che soddisfano alla proprietà (1).

3. Sia  $L : K$  un'estensione di campi (cioè  $K$  e  $L$  sono campi e  $K$  è un sottocampo di  $L$ ) e si supponga che  $L$  abbia 49 elementi. Cosa si può allora dire del campo  $K$ ?
4. **Solo per studenti di algebra 2:** Trovare il polinomio minimo del numero reale  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  su  $\mathbb{Q}$ . Facoltativo: trovare il polinomio minimo di  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  su  $\mathbb{Q}$ .
4. **Solo per studenti di laboratorio di algebra:** Calcolare una base di Gröbner dell'ideale  $I = (x^2y - y, xy^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$  rispetto all'ordinamento lessicografico puro in cui  $x > y$ .