Algebra 2

Esercizi riassuntivi/5

1. Nel campo $\mathbb{R}$ si considerino i sottocampi
$$K_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right) \quad \text{e} \quad K_2 = \mathbb{Q}\left(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$$
Provare che $K_1 = K_2$.

2. Siano $K \subseteq L$ campi. Provare che se $a \in L$ è algebrico su un campo K, allora $a+1$ è algebrico su K. Se il polinomio minimo di a ha grado n, che grado ha il polinomio minimo di $a+1$?

3. Trovare un numero reale a che sia algebrico su $\mathbb{Q}$ il cui polinomio minimo ha grado 3, un altro numero reale il cui polinomio minimo ha grado 4, un altro il cui polinomio minimo ha grado 5 ecc. Far vedere in generale che esistono elementi di $\mathbb{R}$ il cui polinomio minimo ha grado n per ogni n.

4. Siano $K \subseteq L$ campi. Provare che se a e b sono elementi di L algebrici su K, allora $K[a,b] = K(a,b)$, cioè il più piccolo anello che contiene K, a e b è un campo.

5. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{15}$ su $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\right)$.

6. Sia $K \subseteq L \subseteq M$ un'estensione di campi. Provare che se $a \in M$ è algebrico su K, allora a è anche algebrico su L.

7. Trovare un campo di spezzamento del polinomio $x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

8. Provare che $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-3}]$.

9. Provare che, dato un quadrato di lato 5, si può, costruire con riga e compasso, un triangolo rettangolo con base 5 che sia equivalente al quadrato; provare poi che non si può invece costruire un triangolo rettangolo equivalente al quadrato ma con base $\sqrt[3]{5}$.

10. Sia $K \subseteq L$ un'estensione di campi. Provare che se $a \in L$ è algebrico su K, allora a^2 è algebrico su K.

11. Provare che un elemento $a \in \mathbb{C}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ se e solo se $\sqrt{a}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

12. Provare che $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ è un campo, dire quanti elementi ha e trovare tutti i suoi elementi primitivi.

13. Trovare tutti gli elementi invertibili e tutti i divisori dello zero dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$.

14. Stabilire quanti sono i polimomi monici di $\mathbb{Z}_5[x]$, di grado 6, la cui scomposizione in fattori irriducibili è della forma: $q_1 q_2$, dove q_1 è un polinomio lineare.

15. Provare che l'anello quoziente $K = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ è un campo e dire chi sono tutti gli elementi primitivi di K. Scrivere poi, per ogni elemento $a \in K \setminus \{0\}$, il suo polinomio minimo f_a su $\mathbb{Z}_2$.

16. Sia $F = \mathrm{GF}(p, n)$, con p ed n numeri primi. Trovare tutti i sottocampi di F (cioè tutti i campi K di cui F è un'estensione).

17. Sia $F = \mathbb{Z}_2[t]/(t^4+t+1)$ (si dia per noto il fatto che t^4+t+1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_2[t]$, pertanto F è un campo). Siano $a, b \in F$, con $a = [t^2 + t + 1]$ e $b = [t + 1]$. Trovare i polinomi minimi di a e b su $\mathbb{Z}_2$. Trovare poi un campo intermedio tra $\mathbb{Z}_2$ ed F (diverso da $\mathbb{Z}_2$ ed F).

18. I polinomi $f = x^3 + x + 1$ e $g = x^3 + x^2 + 1$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}_2[x]$, pertanto $K_1 = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ e $K_2[x]/(g)$ sono campi finiti entrambi con 8 elementi, quindi isomorfi. Trovare esplicitamente un isomorfismo tra K_1 e K_2. (Suggerimento: considerare i possibili omomorfismi di anelli $\phi : \mathbb{Z}_2[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]/(g)$ e trovarne uno con il nucleo giusto. . .).

19. Dire quanti sono tutti gli automorfismi del campo $\mathrm{GF}(2, 2)$.

20. Un anello A (commutativo unitario) si dice *booleano* se vale la condizione: $a^2 = a$ per ogni $a \in A$. Provare le seguenti proprietà di un anello booleano A:

    - La caratteristica di A vale 2.
    - Se A è finito, allora esite un $n \in \mathbb{N}$ tale che A ha 2^n elementi.
    - ogni ideale di A primo è anche massimale.
    - Se $\mathcal{M}$ è un ideale massimale di A, allora $A \setminus \mathcal{M} = \{1 - a \mid a \in \mathcal{M}\}$
    - Se I è un ideale finitamente generato di A, allora I è principale. (Suggerimento: provare che $(a, b) = (a + ab + b)$)