Algebra 2

Esercizi riassuntivi/1

1. Sia X un insieme e $A = \{f : X \longrightarrow \mathbb{Q}\}$. Dati $f, g \in A$ si definisca $f + g$ con la legge: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e analogamente si definisca $f \cdot g$.
   (a) Provare che $(A, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario.
   (b) Se X è costituito da 2 elementi, come si può anche indicare A?
   (c) Sia X un insieme infinito e sia
   $$B = \{f \in A \mid \text{con } f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \in X\}$$
   B eredita somma e prodotto da A. B è un anello commutativo unitario?

2. Siano A e B anelli commutativi unitari. Provare che, se α è un ideale di A e β è un ideale di B, allora $\alpha \times \beta$ è un ideale di $A \times B$. Provare che tutti gli ideali di $A \times B$ sono di questa forma. In particolare, descrivere tutti gli ideali di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3. Siano A e B domini d'integrità. Trovare tutti i divisori dello zero di $A \times B$.

4. Siano I, J due ideali di un anello A. Sia $X = I \cup J$. Provare che vale:
   $$(X) = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$$
   (dove, al solito, (X) indica l'ideale generato da X). In questo caso l'ideale (X) si indica con $I + J$ e si dice *ideale somma* di I e J.

5. Trovare un esempio che dimostri che $I + J$ non coincide con $I \cup J$.

6. Sia A un anello e siano I, J due ideali di A tali che $I + J = (1)$. Provare che gli anelli $A/(I \cap J)$ e $A/I \times A/J$ sono isomorfi.