Corso di Studi in Matematica
Corso di **Algebra 2**
Esercizi - V

26 novembre 2009

1. Sia A un anello commutativo unitario e si supponga che A abbia due soli ideali: (0) e (1). Provare che allora A è un campo.

2. Nel campo $\mathbb{R}$ si considerino i sottocampi

$$K_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right) \quad \text{e} \quad K_2 = \mathbb{Q}\left(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$$

   Provare che $K_1 = K_2$.

3. Provare che $\sqrt{6} - 1 \in \mathbb{R}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e calcolare il suo polinomio minimo.

4. Provare che $\sqrt{6} + 3\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

5. Siano $K \subseteq L$ campi. Provare che se $a \in L$ è algebrico su un campo K, allora $a+1$ è algebrico su K. Se il polinomio minimo di a ha grado n, che grado ha il polinomio minimo di $a+1$?

6. Trovare un numero reale a che sia algebrico su $\mathbb{Q}$ il cui polinomio minimo ha grado 3, un altro numero reale il cui polinomio minimo ha grado 4, un altro il cui polinomio minimo ha grado 5 ecc. Far vedere in generale che esistono elementi di $\mathbb{R}$ il cui polinomio minimo ha grado n per ogni n.

7. Siano $K \subseteq L$ campi, sia $a \in L$ e sia $g \in K[x]$ un polinomio non nullo, monico, irriducibile, tale che $g(a) = 0$: Provare allora che g è il polinomio minimo di a su K.

8. Siano $K \subseteq L$ campi. Provare che se a e b sono elementi di L algebrici su K, allora $K[a, b] = K(a, b)$.

9. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{6}$ su $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

10. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{15}$ su $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\right)$.