Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

9 settembre 2014

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Costruire un esempio di un polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ di grado 6 tale che f, f', f'', f''' siano irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$ (con f', f'', f''' si indica, rispettivamente, la derivata prima, seconda e terza di f).

2. Siano m ed n due numeri interi positivi, con m divisore di n. Sia $\mu(n) \neq 0$, cioè $n = p_1 \cdots p_r$ con p_i primi distinti. Calcolare:

$$\sum_{\{d\ :\ m|d,\ d|n\}} \mu(d)$$

(μ è la funzione di Möbius).

3. Sia K un campo finito e A un sottoanello di K. Provare che A è un campo. Se K ha p^n elementi (con p primo), quanti elementi può avere A?

4. Siano $f, g \in K[x]$ con K campo ($f \neq g$) e sia $a \in K$ tale che $f(a) = g(a)$. Provare allora che esiste un polinomio $h \in K[x]$ non nullo tale che $f = g + (x - a)h$.