Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

14 luglio 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia A un anello (commutativo, unitario) in cui ogni elemento $a \in A \setminus \{0\}$ ha ordine finito rispetto alla moltiplicazione, cioè:
$$\forall a \in A \setminus \{0\} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad a^n = 1.$$
Provare allora che in A ogni elemento non nullo è invertibile (cioè A è un campo).

2. Del campo K si sa che ha 4 elementi $(0, 1, a, b)$ e la tabella di moltiplicazione degli elementi non nulli è:
$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & b & 1 \\ b & b & 1 & a \end{array}$$
   - Dire qual è la caratteristica p del campo K;
   - Trovare tutti gli elementi primitivi di K;
   - Trovare tutti i polinomi irriducibili $q \in \mathbb{Z}_p[x]$, tali che $\mathbb{Z}_p[x]/(q)$ è isomorfo a K e mostrare esplicitamente come tali isomorfismi operano sugli elementi;
   - Scrivere la tabella additiva di K.

3. Si consideri il numero $a = \sqrt{27} \in \mathbb{C}$. Trovare il polinomio minimo di a rispettivamente sui campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ e $\mathbb{Q}[i]$ (ove $i \in \mathbb{C}$ è tale che $i^2 = -1$).

4. Usando l'algoritmo di Berlekamp, trovare i fattori irriducibili di
$$x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$