Algebra 2

Esercizi riassuntivi/4

Risolvere almeno 5 dei seguenti esercizi.

1. Siano K_1 e K_2 due campi e sia $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$ un omomorfismo (di anelli). Se K_1 ha caratteristica p, quanto vale la caratteristica di K_2? E se K_2 ha caratteristica p, cosa si può dire della caratteristica di K_1?

2. Sia $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n e sia $a \in \mathbb{Z}$ il coefficiente direttivo di f. Sia poi $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ dato da $g(y) = a^{n-1} f(y/a)$. Provare che g è un polinomio monico a coefficienti in $\mathbb{Z}[x]$. Provare che f è irriducibile se e solo se g è irriducibile.

3. Quanti sono i polinomi monici irriducibili di grado 2 di $\mathbb{Z}_p[x]$ (p numero primo)?

4. Per quali valori di $a \in \mathbb{Q}$ il polinomio $f = x^4 + 2x^2 + a \in \mathbb{Q}[x]$ ha fattori multipli?

5. Sia A un UFD. Un polinomio $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$ si dice *primitivo* se m.c.d. $(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Ricordando la dimostrazione fatta nel caso in cui $A = \mathbb{Z}$, provare che se $f, g \in A[x]$ sono primitivi, allora fg è primitivo.

6. Usando l'algoritmo di Berlekamp, scrivere la scomposizione in fattori irriducibili di $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

7. Usando l'algoritmo di Berlekamp, trovare per quali $a \in \mathbb{Z}_p$ il polinomio $x^3 - a \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile (p numero primo).

8. Siano $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ tali che f è un polinomio nella sola variabile x e g è un polinomio nella sola variabile y. Provare che allora l'ideale (f, g) di $\mathbb{Q}[x, y]$ non può essere un ideale principale.

9. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ che contengono l'ideale $I = (x^2 - 9, y + z - 1, z - 2)$.

10. Provare che l'ideale $(x^7 + 3x^3 + 6x - 12, y - 2, z - 3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ è un ideale massimale. Se viene considerato in $\mathbb{R}[x, y, z]$, è ancora massimale?