Corso di Studi in Matematica
Corso di **Algebra 2**
Esercizi - VI

23 dicembre 2009

1. Sia $K \subseteq L \subseteq M$ un'estensione di campi. Provare che se $a \in M$ è algebrico su K, allora a è anche algebrico su L.
2. Trovare un campo di spezzamento del polinomio $x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.
3. Provare che $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-3}]$.
4. Provare che, dato un quadrato di lato 5, si può, costruire con riga e compasso, un triangolo rettangolo con base 5 che sia equivalente al quadrato; provare poi che non si può invece costruire un triangolo rettangolo equivalente al quadrato ma con base $\sqrt[3]{5}$.
5. Sia $K \subseteq L$ un'estensione di campi. Provare che se $a \in L$ è algebrico su K, allora a^2 è algebrico su K.
6. Sia $K \subseteq L$ un'estensione di campi. Provare che se $[L : K] = n$, allora ogni elemento a di L è zero di un polinomio di grado al massimo n. (Suggerimento: considerare gli elementi $1, a, a^2, \ldots, a^n$)
7. Provare che un elemento $a \in \mathbb{C}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ se e solo se $\sqrt{a}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.
8. Provare che $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ è un campo, dire quanti elementi ha e trovare tutti i suoi elementi primitivi.
9. Stabilire quanti sono i polimomi monici di $\mathbb{Z}_5[x]$, di grado 6, la cui scomposizione in fattori irriducibili è della forma: $q_1 q_2$, dove q_1 è un polinomio lineare.
10. Provare che l'anello quoziente $K = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ è un campo e dire chi sono tutti gli elementi primitivi di K. Scrivere poi, per ogni elemento $a \in K \setminus \{0\}$, il suo polinomio minimo f_a su $\mathbb{Z}_2$.