

Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

16 febbraio 2011

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Trovare il numero di fattori irriducibili di

$$x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

e dire se ci sono fattori multipli.

2. Si consideri l'estensione di campi $L : K$ dove $L = \mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 1)$ e $K = \mathbb{Z}_7$ e sia $u = [2 + 3x] \in L$. Calcolare $[L : K]$. Dire che grado ha il polinomio minimo di u su K . Successivamente calcolare tale polinomio minimo.
3. Provare che in $\mathbb{Z}[x]$ esistono infiniti polinomi di grado 10 la cui scomposizione in fattori irriducibili è costituita da un polinomio di grado 6 e uno di grado 4.
4. Sia n un numero naturale e p un numero primo; sia inoltre Q l'insieme di tutti i polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$ di grado d , per ogni d divisore di n . Che grado ha il polinomio ottenuto facendo il prodotto di tutti gli elementi di Q ?