Algebra 2

Esercizi riassuntivi/3

1. Usando opportunamente l'algoritmo di Berlekamp, trovare i fattori irriducibili di $x^{15} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

2. Usando l'algoritmo di Berlekamp, trovare per quali $a \in \mathbb{Z}_3$ il polinomio $x^4 - a \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile.

3. Sia $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n e sia $a \in \mathbb{Z}$ il coefficiente direttivo di f. Sia poi $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ dato da $g(y) = a^{n-1} f(y/a)$. Provare che g è un polinomio monico a coefficienti in $\mathbb{Z}[x]$. Provare che f è irriducibile se e solo se g è irriducibile.

4. Provare che esistono infiniti $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tali che il polinomio

$$\left(a + 3 + \frac{1}{a}\right) x^3 + \frac{3}{a} x^2 + \frac{6}{a} + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

   è irriducibile.

5. Sia $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ (con p primo). Supponiamo che $D^2(f) = 0$ (dove $D^2(f) = D(D(f))$ e D è l'operazione di derivazione). Come è fatto il polinomio f?

6. Siano K_1 e K_2 due campi e sia $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$ un omomorfismo (di anelli). Se K_1 ha caratteristica p, quanto vale la caratteristica di K_2? E se K_2 ha caratteristica p, cosa si può dire della caratteristica di K_1?

7. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ che contengono l'ideale $I = (x^2 - 4, y + z - 2, z - 1)$.