Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

27 settembre 2012

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia $f = x^{15} + 3x^{10} + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. Provare che in $\mathbb{Q}[x]$ ci sono infiniti polinomi irriducibili monici, di grado 3 e la cui derivata è un polinomio riducibile e ci sono anche infiniti polinomi monici irriducibili, di grado 3, la cui derivata è irriducibile.

3. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$. Provare che K è un campo. Elencare gli elementi di K. Trovare poi due elementi $a, b \in K$ tali che a sia elemento primitivo di K e b non sia primitivo.

4. Sia A un anello e $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di ideali tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $I_k \subseteq I_{k+1}$. Provare che:
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$
è un ideale di A.