Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

8 giugno 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Risolvere il seguente sistema di congruenze in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$

2. Dire per quali valori di p numero primo, il polinomio $x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.
(Suggerimento: provare con l'algoritmo di Berlekamp alcuni valori di p e poi cercare di generalizzare).

3. Provare, *nel modo più veloce possibile*, che i polinomi $q_1 = x^2 + 2x + 2$ e $q_2 = x^2 + 1$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$. Trovare un elemento primitivo di $\mathbb{Z}_3[x]/(q_1)$ e un elemento primitivo di $\mathbb{Z}_3[x]/(q_2)$. Scrivere infine esplicitamente un isomorfismo tra $\mathbb{Z}_3[x]/(q_1)$ e $\mathbb{Z}_3[x]/(q_2)$.

4. **(Solo per gli studenti del corso di Algebra 2)** Sia $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \mathrm{i}]$. Mostrare che K è un campo; calcolare $(\sqrt{-12})^{(-1)}$ e calcolare infine:

$$[K : \mathbb{Q}]$$

5. **(Solo per gli studenti del corso di Laboratorio di Algebra)** Calcolare una base di Gröbner, rispetto al term order Lex tale che $x < y < z$ dell'ideale $I = (x^2y - 1, y^2z, x^2z) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$. Dire poi quali sono le possibili basi di Gröbner di I rispetto a tutti i possibili term order.