

Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

21 febbraio 2012

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Provare che $a \in \mathbb{C}$ è algebrico su \mathbb{Q} se e solo se \sqrt{a} è algebrico su \mathbb{Q} .
2. Sia $F = \text{GF}(p, n)$ con n, p numeri primi. Trovare tutti i sottocampi di F .
3. Provare che l'ideale $I = (x, y-2, z^2-3)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x, y, z]$.
Provare poi che I non è massimale in $\mathbb{R}[x, y, z]$. Trovare infine tutti gli ideali massimali $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$ tali che $I \subseteq \mathcal{M}$.
4. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Provare che vale:

$$(a) + (b) = (\text{mcd}(a, b))$$

(dove (u) indica l'ideale generato da u e, se I e J sono due ideali, $I + J$ indica il più piccolo ideale che contiene I e J).