Corso di Studi in Matematica
Corso di **Algebra 2**
Esercizi - IV

10 novembre 2009

1. Sia A un anello (commutativo, unitario) e siano I e J due ideali di A. Con $I + J$ si indica l'ideale generato dall'insieme $I \cup J$, cioè $I + J$ è il più piccolo ideale di A che contiene sia I, sia J. Provare che vale:

$$I + J = \{a + b \mid a \in I \text{ e } b \in J\}.$$

Più in generale, siano $I_1, I_2, \ldots, I_r$ ideali di A. Con $I_1 + I_2 + \cdots + I_r$ si indica l'ideale generato dall'insieme $\cup_{j=1}^{r} I_j$. Provare che vale:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_r = \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_j \mid a_j \in I_j \right\}.$$

2. Sia A una anello (commutativo, unitario) e siano I e J due ideali di A tali che $I + J = (1)$. Sia

$$\phi : A/(I \cap J) \longrightarrow A/I \times A/J \quad \text{definita da: } \phi([a]_{I\cap J}) = ([a]_I, [a]_J)$$

Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli. (Suggerimento: cercare di imitare la dimostrazione del teorema cinese del resto).

3. Sia A un anello (commutativo, unitario) e siano $I_1, I_2, \ldots, I_r$ ideali di A tali che $I_h + I_k = (1)$ per ogni $h \neq k$. Si fissi poi $h \in \{1, \ldots, r\}$ e sia $J_h = \cap_{j\neq h} I_j$. Provare che $I_h + J_h = (1)$. Usare il risultato precedente per provare che $A/(I_1 \cap \cdots \cap I_r)$ è isomorfo a $A/I_1 \times \cdots \times A/I_r$.

4. Provare che se $m, n \in \mathbb{Z}$ sono due interi NON primi tra loro, allora NON è vero che $\mathbb{Z}_{mn}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. (Pertanto vale: $\mathbb{Z}_{mn}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ se e solo se m ed n sono primi tra loro).