Algebra 2

Esercizi riassuntivi/4

1. Trovare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dei seguenti elementi di $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

2. Si consideri un'estensione $L : K$ di campi. Siano $a, b \in L$ algebrici su K. Provare che allora $a+b$, ab e a^{-1} (se $a \neq 0$) sono algebrici su K. Dedurre che l'insieme $A = \{a \in L \mid a \text{ algebrico su } K\}$ è un campo che contiene K.

3. Sia $K = \mathbb{Z}_5$ e $L = \mathbb{Z}_5[t]/(t^2+3)$. Provare che L è un campo. Sia poi $a = [t+2] \in L$. Provare che a è algebrico su K.

4. Provare che l'ideale $(x+y+z+1, y+3z, z-4) \subseteq \mathbb{Q}[x,y,z]$ è un ideale massimale di $Q[x,y,z]$.

5. Sia $I = (x^3, x^2y, y^4) \subseteq \mathbb{Q}[x,y,z]$. Descrivere tutti gli ideali primi $P \subseteq \mathbb{Q}[x,y,z]$ che contengono I.

6. Provare che in $\mathbb{Q}[x]$ ci sono infiniti polinomi irriducibili monici, di grado 3 e la cui derivata è un polinomio riducibile e ci sono anche infiniti polinomi monici irriducibili, di grado 3, la cui derivata è irriducibile.

7. Provare che l'ideale $I = (x, y^2-2)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x,y]$ e provare che invece I non è massimale in $\mathbb{R}[x,y]$. Trovare infine tutti gli ideali massimali $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ tali che $I \subseteq \mathcal{M}$.