Algebra 2
Esercizi riassuntivi/3

Svolgere almeno 5 dei seguenti esercizi. Le risposte devono essere scritte in modo chiaro e sintetico.

1. Ripetendo passo passo la dimostrazione del teorema cinese del resto, trovare le soluzioni al sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

2. Sia K un campo e siano $f, g, h \in K[x]$ tre polinomi di grado due, irriducibili, distinti tra loro. Dimostrare che esiste un unico polinomio $T \in K[x]$ di grado al massimo 5 tale che:

$$\begin{cases} T \equiv x+1 \mod f \\ T \equiv x+1 \mod g \\ T \equiv x+1 \mod h \end{cases}$$

3. Scrivere la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio

$$f = 100x^2 + 400x + 300$$

in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$.

4. Scrivere la scomposizione i fattori irriducibili del polinomio

$$x^{14} + 2x^7 + 4 \in \mathbb{Z}_7[x].$$

5. Quanti sono i polinomi f di grado 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$ tali che $D(D(f)) = 0$? (D indica l'operazione di derivazione)

6. Sia K un campo, $f, g \in K[x]$ tali che $D(f) = 2D(g)$. Che legame c'è tra f e g se K è di caratteristica 0? E qual è il legame se K è un campo perfetto?

7. Provare che il polinomio:

$$(a^2 + a + 1)x^5 + (a + 1)x^2 + a^2 + a \in \mathbb{Z}[x]$$

è irriducibile per infiniti valori di $a \in \mathbb{Z}$.

8.* Provare che $x^{101} + 100 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile.