

Algebra 2

Corso di laurea in Matematica

12 luglio 2011

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Siano K, L, M tre campi, tali che L è un'estensione di K e M è un'estensione di L . Sia poi $a \in M$ algebrico su K e $L \subseteq K[a]$. Allora $L : K$ è un'estensione algebrica di K ? E, se sì, cosa si può dire del suo grado?
2. Provare che il campo $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ è perfetto. Calcolare $\sqrt[3]{x+1}$.
3. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{N}$ il polinomio:

$$f_{a,b}(x) = 2x^a + 3x^b + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

è una potenza quinta?

4. Provare che il polinomio:

$$\frac{1}{3}x^5 + ax^4 + bx + 4 \in \mathbb{Q}[x]$$

è irriducibile, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.