

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**  
**Prova scritta**

21 settembre 2011

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia  $K$  un campo finito con 9 elementi. Quanti elementi primitivi ha  $K$ ?
2. Sia  $a \in \mathbb{R}$  algebrico su  $\mathbb{Q}$  e si supponga che il polinomio minimo di  $a$  su  $\mathbb{Q}$  sia di grado  $p$ , con  $p$  primo. Sia  $b \in \mathbb{Q}[a] \setminus \mathbb{Q}$ .  
Provare che  $b$  è algebrico su  $\mathbb{Q}$  e dire qual è il grado del polinomio minimo di  $b$  su  $\mathbb{Q}$ .
3. Usando il metodo di Berlekamp, trovare il numero di fattori irriducibili di  $4x^3 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ .
4. Sia  $K$  un campo,  $f, q \in K[x]$ , con  $q$  irriducibile e si supponga che  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sia la massima potenza di  $q$  che divide  $f$ . Quale potenza di  $q$  divide  $f'$ ?