

Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

10 febbraio 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Calcolare $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) : \mathbb{Q}]$. Trovare poi il polinomio minimo di $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$.
2. Usando i teoremi di Berlekamp, dire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_5$ il polinomio $x^4 - a \in \mathbb{Z}_5[x]$ è irriducibile.
3. Trovare tutte le soluzioni in \mathbb{Z} del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

4. Dire per quali valori di $a \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ il polinomio $ax^3 - 30x^2 + 6$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$.