Algebra 2

Esercizi riassuntivi/2

(Svolgere almeno 5 dei seguenti esercizi)

1. Sia A un anello (commutativo, unitario), $A[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in A e $F : A[x] \longrightarrow A[x]$ data da $F(a) = a$ per ogni $a \in A$, $F(x) = x + 1$ (e poi estesa nell'unico modo possibile che la rende omomorfismo di anelli). Provare che F è un automorfismo di $A[x]$.

2. Siano A, B anelli (commutativi, unitari), $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e $\Phi : A[x] \longrightarrow B[x]$ ottenuta da $\Phi(a) = \phi(a)$ per ogni $a \in A$ e $\Phi(x) = x$. Provare: che ϕ è iniettiva se e solo se Φ è iniettiva;

3. Sia A un anello (commutativo, unitario) e $I \subseteq A$ un ideale di A. Sia poi J l'ideale generato da I nell'anello $A[x]$. Provare che vale:
$$J = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in I\}$$
(cioè J risulta l'insieme di tutti i polinomi di $A[x]$ a coefficienti in I). L'ideale J si indica solitamente con $I[x]$.

4. Siano A, B anelli (commutativi, unitari), $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e $\Phi : A[x] \longrightarrow B[x]$ ottenuta da $\Phi(a) = \phi(a)$ per ogni $a \in A$ e $\Phi(x) = x$. Provare che $\ker(\Phi) = \ker(\phi)[x]$ (usando la notazione introdotta nell'esercizio 3).

5. Sia A un anello (commutativo, unitario) e $I \subseteq A$ un ideale di A. Provare che vale:
$$\frac{A[x]}{I[x]} \cong \frac{A}{I}[x]$$

6. Sia A un anello e siano I, J due ideali di A tali che $I + J = (1)$. Provare che gli anelli $A/(I \cap J)$ e $A/I \times A/J$ sono isomorfi.

7. Dato un numero naturale N, si esegua la somma delle sue cifre. Se tale somma è un numero di più di una cifra, si sommino le cifre di questo numero e così via, finché si ottiene un numero ad una sola cifra che indichiamo con $S(N)$. Ad esempio, partendo da 733242134450 si ottiene come somma di cifre 38, poi 12 e infine 3, quindi $S(733242134450) = 3$.

   La "regola del 9" dice che deve valere: $S(M \cdot N) = S\left(S(M) \cdot S(N)\right)$.

   Spiegare perché funziona la regola del 9 (non usare più di 5 righe per la spiegazione).

8. Siano $f, g \in K[x]$ con K campo ($f \neq g$) e sia $a \in K$ tale che $f(a) = g(a)$. Provare allora che esiste un polinomio $h \in K[x]$ non nullo tale che $f = g + (x - a)h$.

9.* Con $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ indichiamo il sotto-anello di $\mathbb{C}$ costituito da tutti i numeri complessi della forma $a + b\mathrm{i}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ (somma e prodotto sono quelli dei numeri complessi). Trovare tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.