Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

27 gennaio 2012

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello prodotto:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x]$$

   (dove $\mathbb{Z}[x]$ è l'anello dei polinomi su $\mathbb{Z}$).

2. Sia A un anello (commutativo, unitario) e $J \subseteq A$ un ideale di A. Provare che gli anelli

$$\frac{A[x]}{J[x]} \quad \text{e} \quad \frac{A}{J}[x]$$

   sono isomorfi (dove $J[x]$ è il più piccolo ideale di $A[x]$ che contiene J).

3. Provare che in $\mathbb{Q}[x]$ ci sono infiniti polinomi irriducibili di grado 4 la cui derivata è un polinomio riducibile e infiniti polinomi irriducibili di grado 4 la cui derivata è un polinomio irriducibile.

4. Sia $L : K$ un'estensione di campi. Provare che $a \in L$ è algebrico su K se e solo se $a + 1$ è algebrico su K.

Soluzioni

1. Sia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x]$ non nullo e sia $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x]$ anche non nullo, tale che $(a, b)(c, d) = 0$. Allora $ac = 0$ e $bd = 0$. Siccome (a, b) è non nullo, avremo $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Se $a \neq 0$ allora $c = 0$, se anche $b \neq 0$ allora $d = 0$ ($\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}[x]$ sono domini). Poiché (c, d) è non nullo, abbiamo che allora o a o b deve essere 0. Pertanto tutti e soli i divisori dello zero sono della forma $(a, 0)$ o $(0, b)$, dove $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}[x]$.

2. Se $J \subseteq A$ è un ideale di A, allora $J[x]$ risulta l'ideale $\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i \in J\}$. Consideriamo la proiezione canonica $\pi : A \longrightarrow A/J$. Essa si può estendere a un'applicazione $\phi : A[x] \longrightarrow A/J[x]$ tale che $\phi(a) = [a]$ se $a \in A$ e $\phi(x) = x$. L'omomorfismo ϕ è suriettivo (perché lo è π). Il suo nucleo è $J[x]$, quindi l'isomorfismo segue per il teorema di omomorfismo.

3. Nel primo caso possiamo prendere, ad esempio, i polinomi $x^4 + p$ con p primo. Sono irriducibili per Eisenstein e la loro derivata è riducibile. Nel secondo caso i polinomi $x^4 + px + p$ che sono irriducibili per ogni p primo e anche la loro derivata è irriducibile (sempre per Eisenstein).

4. Un elemento a è algebrico su K se e solo se $[L : K[a]] < \infty$. Ma $K[a] = K[a + 1]$, da cui la tesi.