Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

14 settembre 2010

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Dare un esempio di un anello A (commutativo, unitario), con infiniti elementi, di caratteristica 6. Mostrare poi che non esistono anelli, sempre di caratteristica 6, con 7 elementi.

2. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $g \in \mathbb{Q}[x]$ tale che g^3 divide f. Provare che allora $\operatorname{mcd}(f, f'') \neq 1$ (dove f'' indica la derivata seconda di f).

3. Usando l'algoritmo di Berlekamp, dire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_5$ il polinomio $x^2 + x + a \in \mathbb{Z}_5[x]$ è irriducibile. Si riesce a trovare una risposta "veloce" alla domanda, senza usare Berlekamp?

4. Si consideri il polinomio $x^3 + 3ax + 2b \in \mathbb{C}[x]$. Provare che, comunque siano scelti $a, b \in \mathbb{C}$, con $b \neq 0$, il polinomio ha sempre 3 radici distinte. Cosa si può dire invece di tale polinomio se viene pensato in $\mathbb{Z}_p[x]$ (con p primo e $a, b \in \mathbb{Z}_p$, $b \neq 0$)?