Corso di Studi in Matematica
Corso di **Algebra 2**
Esercizi - I

18 ottobre 2009

1. Provare che in un gruppo G l'elemento neutro è unico.

2. Sia A un anello (commutativo, unitario). Provare che vale:

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{per ogni } a \in A$$

3. Provare che se A è un dominio di integrità e se B è un sottoanello di A, allora B è un dominio di integrità.

4. Con $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ si indichi il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dai numeri complessi $a + \sqrt{-5}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Provare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un anello. Trovare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

5. Provare che se A è un campo, allora gli unici ideali di A sono (0) e A stesso (quest'ultimo si usa indicare anche con (1)).

6. Provare che se A è un anello e $I \subseteq A$ un suo ideale tale che contiene un elemento invertibile di A, allora $I = (1)$.

7. Elencare tutti gli elementi invertibili e tutti i divisori dello zero di $\mathbb{Z}_{12}$.

8. Trovare tutte le soluzioni t dell'equazione $8t = 10$ in $\mathbb{Z}_{12}$ (8 e 10 sono una notazione abbreviata per indicare le classi [8] e [10] in $\mathbb{Z}_{12}$).

9. Siano A e B due anelli. Sull'insieme $A \times B$ (prodotto cartesiano di A e B) si definisca una somma e un prodotto nel seguente modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{per ogni } a, b, c, d \in A$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d) \qquad \text{per ogni } a, b, c, d \in A$$

   Provare che in questo modo $A \times B$ diventa un anello (detto *anello prodotto di* A e B).

10. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello prodotto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$.

11. Trovare tutte le soluzioni t dell'equazione $(2, 4) \cdot t = (1, 6)$ nell'anello prodotto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$.

12. Trovare tutti i divisori dello zero e tutti gli elementi invertibili di $K \times K$ (dove K è un campo).

13. Trovare tutte le soluzioni di $12x = 0$ in $\mathbb{Z}_{42}$ e cercare di generalizzare il risultato, in modo da riuscire ad avere una formula che descrive tutte le soluzioni di $ax = 0$ in $\mathbb{Z}_m$.