Corso di Studi in Matematica
Corso di **Algebra 2**
Esercizi - II

20 ottobre 2009

1. Usando la ben nota formula che trova le radici di un polinomio di secondo grado, risolvere l'equazione: $x^2 + 5x + 8 = 0$ in $\mathbb{Z}_{23}$.

2. Trovare il massimo comun divisore d di $f = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ e $g = 3x^3 + 4x^2 + 3$ in $\mathbb{Z}_5[x]$. Trovare poi due polinomi $a, b \in \mathbb{Z}_5[x]$ tali che $d = af + bg$.

3. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$.

4. Trovare tutti gli elementi invertibili dell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$.

5. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   - Provare che gli elementi 2 e 3 sono elementi irriducibili di A;
   - Provare che $1+\sqrt{-5}$ e $1-\sqrt{-5}$ sono anche elementi irriducibili di A.
   - Provare che 2 non è associato né a $1+\sqrt{-5}$ né a $1-\sqrt{-5}$ (analogamente nemmeno 3 lo è);

   in questo modo si è provato che l'anello A non è un dominio a fattorizzazione unica, infatti in A vale:
   $$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5}).$$

6. Provare che se K è un campo algebricamente chiuso, allora K è infinito.

7. Sia $A = \mathbb{Z}_8[x]$. Trovare in A un polinomio f il cui coefficiente direttivo è un divisore dello zero e un polinomio g tali che f divida g con quoziente e resto non unici.