Algebra 2
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta

7 settembre 2012

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
2. Sia K un campo ed L una sua estensione. Sia inoltre $a \in L$ algebrico su K di grado 3 (cioè il polinomio minimo di a su K è di grado 3). Provare che $a^2 + 1$ è anche algebrico su K di grado ancora 3.
3. Si consideri l'ideale $I = (x + 1, y^2 + 2) \subseteq \mathbb{Z}_3[x, y]$. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_3[x, y]$ che contengono I.
4. Sia $f : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ data da $f([u]) = (u \bmod 3, u \bmod 5)$ (dove $[u]$ indica la classe di u in $\mathbb{Z}_{15}$). Come è ben noto, f è un isomorfismo di anelli. Trovare l'inversa g di f, più precisamente, dato $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, trovare una formula per esprimere $g(a, b)$.