

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2023–24**  
**Scritto 5 settembre 2024**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Dopo aver dato la definizione di *campo perfetto*, dimostrare che ogni campo finito è perfetto. Provare poi che  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$  è un campo e trovare  $b \in K$  tale che  $b^3 = [x + 2]$ .
2. Sia  $K$  un campo. Provare che ogni ideale di  $K[x]$  è principale.
3. Provare che per ogni  $a \in \mathbb{Z}$  il polinomio  $x^3 + 5a(a^2 - 1)x^3 + 6x + 3$  è irriducibile in  $\mathbb{Z}[x]$ . Provare che per ogni  $a \in \mathbb{Z}$  anche il polinomio  $x^3 + 5a(a^2 - 1)x^3 + 6x + 1$  è irriducibile in  $\mathbb{Z}[x]$ .
4. Sia  $a \in \mathbb{C}$  algebrico di grado  $n$  su  $\mathbb{Q}$ . Provare che anche  $a + 2$  è algebrico di grado  $n$  su  $\mathbb{Q}$ .
5. Sia  $G$  un gruppo tale che  $a^2 = 1$  per ogni  $a \in G$ . Provare che  $G$  è un gruppo commutativo.