Corso di laurea in Matematica
Algebra2
a.a. 2024–25
Scritto 2 settembre 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{2a + xb \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che:
   (a) I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;
   (b) $x, 2 \in I$, $1 \notin I$;
2. Dopo aver spiegato perchè il polinomio $f = x^2+3x+3 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile, trovare l'inverso di $[x + 2] \in \mathbb{Q}[x]/(f)$.
3. Quali sono i campi K intermedi tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ (cioè i campi che sono estensione di $\mathbb{Q}$ e sottocampi di $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$)?
4. Provare che il seguente polinomio:
$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{a(a+1)}{2}x^3 + (2a+1)x + 1$$
   è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni $a \in \mathbb{N}$.
5. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo di anelli tale che $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = -2x + 1$ e poi esteso nell'unico modo possibile. Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli e dire chi è il suo inverso.