

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2024–25**  
**Scritto 22 gennaio 2025**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $H = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$ . Provare che  $H$ , rispetto al prodotto, è un sottogruppo del gruppo  $G$  dato da  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ . Quanti sono le classi laterali di  $H$  in  $G$ ? Trovare il gruppo quoziente  $G/H$ .
2. Dire per quali  $a \in \mathbb{Z}$  il numero:

$$n^{13} + n^{12} + n^{11} - n^3 + an^2 + 10n$$

è divisibile per 11 per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

3. Sia  $G$  un gruppo di 91 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha  $G$ .
4. Trovare tutti i polinomi riducibili e irriducibili di grado 2 di  $\mathbb{Z}_5[x]$ .
5. Si provi che l'elemento  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$  è algebrico su  $\mathbb{Q}$ . Trovare il suo grado (cioè il grado del suo polinomio minimo).