

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2023–24**  
**Scritto 20 settembre 2024**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo e si consideri l'insieme  $C = \{c \in G \mid gc = cg, \forall g \in G\}$  ( $C$  è detto il centro di  $G$ ). Provare che  $C$  è un sottogruppo di  $G$  abeliano e normale in  $G$ .
2. Sia  $A = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ . Dire quanti elementi ha l'anello  $A$ . Trovare i suoi divisori dello zero.
3. Nell'anello dei polinomi  $\mathbb{Z}[x]$  si consideri l'insieme di polinomi

$$F = \{x^5 + 12x + a \mid a \in \mathbb{N}, a > 0\}.$$

Provare che l'insieme  $F$  contiene infiniti polinomi irriducibili in  $\mathbb{Z}[x]$ . Trovare anche un polinomio in  $F$  che sia riducibile (in  $\mathbb{Z}[x]$ ).

4. Sia  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ . Provare che  $K$  è un campo e trovare un elemento primitivo di  $K$ .
5. Provare che  $\mathbb{Z}_{15}$  è isomorfo, come anello, all'anello prodotto  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ .