

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2023–24
Scritto 20 settembre 2024

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo e si consideri l'insieme $C = \{c \in G \mid gc = cg, \forall g \in G\}$ (C è detto il centro di G). Provare che C è un sottogruppo di G abeliano e normale in G .
2. Sia $A = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$. Dire quanti elementi ha l'anello A . Trovare i suoi divisori dello zero.
3. Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'insieme di polinomi

$$F = \{x^5 + 12x + a \mid a \in \mathbb{N}, a > 0\}.$$

Provare che l'insieme F contiene infiniti polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$. Trovare anche un polinomio in F che sia riducibile (in $\mathbb{Z}[x]$).

4. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Provare che K è un campo e trovare un elemento primitivo di K .
5. Provare che \mathbb{Z}_{15} è isomorfo, come anello, all'anello prodotto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.