

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2023–24
Scritto 17 luglio 2024

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia A un anello (commutativo unitario) che è anche un dominio d'integrità. Quale valore può avere la caratteristica di A ?
2. Siano K ed L campi, con L estensione di K . Siano $a, b \in L$ algebrici su K . Provare che $K[a, b]$ (il più piccolo sottoanello di L che contiene K , a e b) è un campo.
3. Sia $f : \mathbb{Q}[x, y] \rightarrow \mathbb{Q}$ un omomorfismo di anelli tale che $f(x) = 1$ e $f(y) = 2$ (e $f(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$). Trovare il nucleo di f .
4. Usando opportunamente il metodo di Berlekamp, dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^9 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
5. Dire chi sono le unità e i divisori dello zero dell'anello prodotto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.