Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2024–25
Scritto 16 settembre 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo con $2p$ elementi (dove p è un numero primo maggiore di 2). Quanti sottogruppi di ordine p ha G ?
2. Sia A un anello (commutativo unitario) che è anche un dominio d'integrità. Quale valore può avere la caratteristica di A ?

3. Nell'anello

$$A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$$

si considerino gli elementi $[x + a]$ con $a \in \mathbb{Q}$. Per quali valori di a tali elementi sono invertibili? E per quali valori di a sono invece divisori dello zero?

4. Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}$. Si spieghi brevemente perché $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un'estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ e si trovi poi il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ sia di $2 + \sqrt{2}$, sia del suo inverso (in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$). Si riesce a trovare un legame tra questi due polinomi minimi?
5. Provare che il polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile. Pertanto l'anello quoziente $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ è un campo. Provare che è perfetto e trovare la radice cubica di $[x + 2]$.