Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2024–25
Scritto 12 febbraio 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia A un dominio d'integrità (quindi, in particolare, un anello commutativo e unitario). Sia $p \in A$ non nullo. Provare che p è un elemento primo di A se e solo se l'ideale (p) è un ideale primo.

2. Si consideri l'anello dei polinomi $P = \mathbb{Z}_4[x]$. Quanti elementi di grado n ci sono in P? Trovare poi tutti i divisori dello zero di P di grado 1.

3. Sia p un numero primo e si consideri l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ dato da $\phi(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = [a_0] + [a_1]x + \cdots + [a_n]x^n$. Provare che se $g \in \mathbb{Z}[x]$ è un polinomio di grado n tale che $\phi(g)$ ha ancora grado n e se $\phi(g)$ è irriducibile, allora g è irriducibile.

4. Provare che il polinomio:
$$4x^6 + 3x^5 + 6ax^4 + 9x^3 + a(a^2 - 1)x^2 + 15$$
è irriducibile per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

5. Quanti sono i polinomi f di grado 3 di $\mathbb{Z}_3[x]$ tali che $D(D(f)) = 0$?