Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2023–24
Scritto 11 giugno 2024

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$ il numero $2n^8 + 5n^7 + an^6 + n + 6$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e si consideri il polinomio

$$x^4 + a(a+1)x^3 + b(b^2 - 1)x^2 + 4x + 10.$$

Provare che è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Si può dire che è anche irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? Perché?

3. Sia K un campo finito di caratteristica p (quindi contiene una copia di $\mathbb{Z}_p$). Provare che è un'estensione algebrica di $\mathbb{Z}_p$.

4. Sia K un campo finito con $q + 1$ elementi, dove q è un numero primo. Provare che ogni elemento di $K \setminus \{0\}$ è un elemento primitivo di K.

5. Sia A un anello che soddisfa la condisione: per ogni $a \in A$ esiste un $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tale che $a^n = a$. Provare che allora in A ogni ideale primo è anche massimale.