

ALGEBRA 2
Esercizi 3_Barcolana - 10 ottobre 2025
I teoremi di Sylow

1. Sia C un gruppo ciclico di ordine 2 (quindi C ha due elementi, 1 e a , con $a^2 = 1$) e sia S_3 il gruppo delle permutazioni di 3 elementi. Sia $G = C \times S_3$ (può essere conveniente indicare gli elementi di S_3 con $1, x_1, x_2, x_3, y, y^2$ dove $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (1, 3)$, $x_3 = (2, 3)$ e $y = (1, 2, 3)$).

- Trovare tutti gli elementi di ordine 2 di G ;
- trovare tutti gli elementi di ordine 3 di G ;
- trovare tutti i p -Sylow sottogruppi di G (con $p \in \{2, 3\}$);
- verificare che i dati trovati sono coerenti con i teoremi di Sylow.

2. In S_4 si considerino i seguenti elementi:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare l'ordine di g e di h . Siano G e H i sottogruppi di S_4 generati da g e h . Spiegare perché G e H sono 3-gruppi di Sylow. Come tali, devono essere coniugati. Trovare allora $\sigma \in S_4$ tale che $G = \sigma H \sigma^{-1}$.

3. Sia G un gruppo di 91 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G .