Algebra 2

Esercizi 7 - 7 novembre 2024

1. Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$ con $\deg(f) \geq 2$ e monico (cioè il coefficiente del monomio di grado massimo vale 1). Provare che se f ha un fattore di grado 1, esso è della forma $x - d$, dove d è un intero divisore del termine noto di f.

2. Provare che i seguenti polinomi:

   $$x^7 + 3a(a+1)x^3 + 6x^2 + a(a^2-1)x + 6 \quad \text{e} \quad x^7 + 3x^3 + 6x^2 + a(a^2-1) + 6$$

   sono irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

3. Scrivere la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio:

   $$f(x) = 200x^2 + 1400x - 1600$$

   sia in $\mathbb{Q}[x]$, sia in $\mathbb{Z}[x]$.

4. Provare che $x^{101} + 100 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile (cercare di utilizzare il criterio di Eisenstein. . .)

5. Trovare la caratteristica dell'anello prodotto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$. Più in generale, trovare la caratteristica dell'anello $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

6. Trovare un esempio di un anello di caratteristica prima p che non sia un dominio d'integrità.

7. Sia K un campo e $f \in K[x]$. Provare che $f/\mathrm{MCD}(f, D(f))$ non ha fattori multipli.

8. Sia $f = 2 + x^3 + 2x^6 + x^9 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Trovare $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ tale che $f = g^3$.

9. Sia K un campo di caratteristica p (con p numero primo) e sia $K(x)$ il campo dei quozienti dell'anello dei polinomi $K[x]$ (quindi gli elementi di $K(x)$ sono frazioni f/g, con $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$). Provare che $K(x)$ è un campo di caratteristica p, ma non è perfetto; (esiste la radice p-ima di x in $K(x)$?).

10. Provare che se A è un anello di caratteristica $c \neq 0$ e se I è un ideale di A, allora l'anello quoziente ha caratteristica d con d divisore di c. Dare un esempio in cui $d \neq c$.