ALGEBRA 2

Esercizi 11 - 6 dicembre 2025

1. Sia $K = (\{0,1,2,3\},+,\cdot)$ un insieme con due operazioni definite dalle seguenti due tabelle:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

   K risulta un campo. Pertanto deve essere della forma $\mathbb{Z}[x]/(q)$ dove p è un numero primo e q è un polinomio irriducibile. Trovare p, q e l'isomorfismo tra K e $\mathbb{Z}_p[x]/(q)$.

2. Sia L un campo finito con 49 elementi e si supponga che L sia un'estensione di un altro campo K. Che cosa si può dire di K?

3. Sia K un campo finito con 2^5 elementi. Provare che ogni elemento non nullo e diverso da 1 di K è primitivo.

4. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. Spiegare perché K è un campo perfetto. Trovare un elemento $a \in K$ tale che $a^3 = [2x+1]$.

5. Si consideri ancora il campo $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. Sia $t^2+1 \in K[t]$ (t una nuova variabile). Si scriva la fattorizzazione in $K[t]$ di t^2+1.

6. I polinomi $f = x^2+1$ e $g = x^2+x+2$ di $\mathbb{Z}_3[x]$ sono irriducibili (giustificare questa affermazione nel modo più rapido possibile), quindi $K_1 = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ e $K_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(g)$ sono due campi. Trovare un isomorfismo tra i due campi. (Suggerimento: trovare il polinomio minimo di $[x+1] \in K_1$ su $\mathbb{Z}_3$ e studiare l'omomorfismo $\mathbb{Z}_3[x] \longrightarrow K_1$ che fissa gli elementi di $\mathbb{Z}_3$ e manda $x \in \mathbb{Z}_3[x]$ in $[x+1] \in K_1$).