Algebra 2

Esercizi 11 - 6 dicembre 2024

1. Sia L un campo, estensione di un campo K. Sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio monico irriducibile e sia $a \in L$ tale che $f(a) = 0$. Provare che allora f è il polinomio minimo di a su K.

2. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt[5]{7} \in \mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$.

3. Provare che il numero reale $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

4. Provare che il numero reale $a = 13 + 4\sqrt{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Trovare il suo grado.

5. Si provi che l'elemento $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Trovare il suo polinomio minimo.

6. Provare che $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[3+2\sqrt{5}]$ e trovare una base di $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

7. Si consideri l'elemento $\lambda = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Provare che è algebrico di grado 2. Si costruisca poi l'isomorfismo ϕ tra $\mathbb{Q}[\lambda]$ e $\mathbb{Q}[x]/(m(x))$, dove $m(x)$ è il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di λ e si mostri come si può passare da un elemento di $\mathbb{Q}[x]/(m(x))$ a un elemento di $\mathbb{Q}[\lambda]$ e viceversa usando l'isomorfismo. Si descriva il campo $\mathbb{Q}[\lambda]$ come un insieme di coppie (a, b) di elementi $a, b \in \mathbb{Q}$ con delle opportune operazioni di somma e prodotto sulle coppie.

8. Si consideri il seguente insieme $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e su di esso si definisca una somma nel seguente modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e un prodotto così:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 5\,bd, ad + bc)$$

Succede (verificarlo, se si vuole) che K, con queste due operazioni, diventa un campo. Si consideri poi l'elemento $\eta = (0, 1)$. Quanto vale η^2? Come si può usare η per vedere che K è isomorfo all'anello di polinomi $\mathbb{Q}[x]$ quozientato su un polinomio irriducibile?