

ALGEBRA 2
Esercizi 2 - 4 ottobre 2025

1. Nell'anello $\mathbb{Z}$ degli interi, si consideri l'ideale generato da due numeri a e b , cioè l'ideale $I = (a, b)$. Provare che I è generato dal massimo comun divisore tra a e b .
2. Provare che in $\mathbb{Z}_m$ un elemento $[a]$ è divisore dello zero se e solo se a ed m non sono primi tra loro.
3. Calcolare $\phi(2^n)$ (dove ϕ è la funzione totiente di Eulero).
4. Siano p e q due numeri primi. Calcolare $\phi(pq)$ (anche qui ϕ indica la funzione totiente).
5. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi $\text{mcd}(a, b) = 1$). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se a divide bc , allora a divide c . (Trovare una soluzione al problema usando l'identità di Bezout).
6. Usare il risultato dell'esercizio precedente per provare che se a e b sono due interi primi tra loro (anche detti *coprime*) e se entrambi dividono un numero intero m , allora il loro prodotto divide m . Fornire un esempio per mostrare che il risultato non è vero se a e b non sono coprime.
7. Calcolare il $\text{mcd}(20, 32)$ usando le divisioni successive. Detto d tale massimo comun divisore, trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ in modo che valga $d = 20\alpha + 32\beta$. Trovare poi tutte le soluzioni (a, b) dell'equazione $20a + 32b = d$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$).
8. Sia $G = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$. Provare che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. Descrivere le classi laterali di G in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Che gruppo è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/G$?