Algebra 2
Esercizi 2 - 4 ottobre 2024

1. Sia A un anello e si definisca su A la relazione: $a \sim b$ se esiste $u \in A$, u invertibile, tale che $a = ub$. Provare che "$\sim$" è una relazione di equivalenza. Chi è l'insieme degli elementi equivalenti ad 1 con tale relazione? Chi è l'insieme degli elementi equivalenti a 0?

2. Sia A un anello (come sempre, commutativo, unitario). Siano $a, b \in A$ e sia $d = \mathrm{mcd}(a, b)$ (quindi, per definizione, $d|a$, $d|b$ e, se $\delta|a$ e $\delta|b$, allora $\delta|d$). Sia $u \in A$ unitario. Provare allora che anche ud è un massimo comun divisore di a e b.

3. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e sia $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. Si supponga che d sia positivo. Provare allora che se $\delta|a$ e $\delta|b$, allora $\delta \leq d$. Quindi in $\mathbb{Z}$ il massimo comun divisore tra due numeri a e b si può definire come il divisore comune ad a e b più grande possibile rispetto all'ordinamento di $\mathbb{Z}$.

4. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi $\mathrm{mcd}\,(a, b) = 1$). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se a divide bc, allora a divide c. (Trovare una soluzione al problema usando l'identità di Bezout).

5. Usare il risultato dell'esercizio precedente per provare che se a e b sono due interi primi tra loro (anche detti *coprimi*) e se entrambi dividono un numero intero m, allora il loro prodotto divide m. Fornire un esempio per mostrare che il risultato non è vero se a e b non sono coprimi.

6. Calcolare il $\mathrm{mcd}\,(20, 32)$ usando le divisioni successive. Detto d tale massimo comun divisore, trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ in modo che valga $d = 20\alpha + 32\beta$. Trovare poi tutte le soluzioni (a, b) dell'equazione $20a + 32b = d$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$).

7. Sia $G = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$. Provare che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. Descrivere le classi laterali di G in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Che gruppo è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/G$?

8. Nel gruppo $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ si consideri il sottoinsieme $H = \{-1, 1\}$. Provare che H è un sottogruppo normale e dire chi è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/H$.