Algebra 2

Esercizi 6 - 30 ottobre 2024

1. Dimostrare che un polinomio $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ ha un fattore lineare se e solo se ha termine noto nullo o ha un numero pari di monomi.

2. Trovare tutti i polinomi riducibili e irriducibili di grado 3 di $\mathbb{Z}_5[x]$.

3. Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio primitivo (quindi il massimo comun divisore dei suoi coefficienti vale 1). Si supponga che $f = gh$ in $\mathbb{Z}[x]$. Provare allora che g e h sono primitivi.

4. Siano $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ due polinomi primitivi e siano $a, b \in \mathbb{Z}$ non nulli tali che $af = bg$. Provare che allora $a = \pm b$ e $f = \pm g$.

5. Sia $a \in \mathbb{Z}$ non nullo e non unitario. Provare che a è irriducibile nell'anello $\mathbb{Z}$ se e solo se a è irriducibile nell'anello $\mathbb{Z}[x]$.

6. Si consideri il polinomio $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Provare che f è irriducibile. Sia poi $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ la proiezione canonica. Da π si costruisca l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]$ ottenuto estendendo π (spiegare come) e si consideri poi il polinomio $g = x^3 - 7x^2 + 4x - 11 \in \mathbb{Z}[x]$. Provare che g è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ (suggerimento: usare $\phi(g) \dots$).

7. Generalizzando l'esercizio precedente, sia p un numero primo e si consideri l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ che estende la proiezione canonica $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. Provare che se $g \in \mathbb{Z}[x]$ è un polinomio di grado n tale che $\phi(g)$ è ancora un polinomio di grado n e se $\phi(g)$ è irriducibile, allora g è irriducibile.

8. A completamento dell'esercizio precedente, trovare un esempio che mostri che l'ipotesi che il grado di $\phi(g)$ deve essere lo stesso del grado di g è essenziale. In altre parole, trovare un esempio che mostri che ci sono polinomi $g \in \mathbb{Z}[x]$ riducibili tali che $\phi(g) \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile (ϕ definita come nell'esercizio precedente).