Algebra 2
Esercizi 10 - 28 novembre 2024

Ideali di un anello

Sia A un anello commutativo unitario. Ricordare che un ideale I di A è un sottogruppo di A per cui vale la legge di assorbimento, cioè se $a \in I$ e $b \in A$, allora $ab \in I$.

1. Sia I un sottoinsieme di A. Provare che I è un ideale se e solo se per ogni $a, b \in I$, vale: $a + b \in I$ e per ogni $a \in I$ e $b \in A$, vale: $ab \in I$.

2. Siano I_1 e I_2 due ideali di A. Provare che $I_1 \cap I_2$ è un ideale di A. Più in generale, siano I_γ $(\gamma \in \Gamma)$ ideali di A. Provare che
$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$
è un ideale di A.

3. Se $X \subseteq A$ è un qualunque sottoinsieme di A non vuoto. Si consideri l'insieme
$$\Sigma = \{I \subseteq A \mid I \text{ è un ideale di } A \text{ che contiene } X\}.$$
Provare che $\Sigma \neq \emptyset$ e che
$$\bigcap_{I \in \Sigma} I$$
è il più piccolo ideale di A che contiene X. Esso si indica con (X) e si dice l'ideale generato da X.

4. Sia $X \subseteq A$ un sottoinsieme qualunque non vuoto. Provare che l'ideale (X) è dato da:
$$\{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_1, \ldots, a_n \in A,\ x_1, \ldots, x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

5. Sia $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ un sottoinsieme finito di A. Provare che $(X) = \{a_1x_1 + \cdots + a_rx_r \mid a_1, \ldots, a_r \in A\}$. In questo caso (X) si indica con $(x_1, \ldots, x_r)$.

6. Provare che l'ideale $(x + 1, y - 3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ non è principale (cioè non è del tipo (h) con $h \in \mathbb{Q}[x, y]$).

7. Sia $I = (x - 1, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ l'ideale generato da $x - 1$ e y. Si consideri poi l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x, y]/I$. Sia $\phi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}[x, y]/I$ l'applicazione data da: $\phi(a) = [a]_I$. Provare che ϕ è un monomorfismo di anelli, quindi il campo $\mathbb{Q}$ si può pensare contenuto nel quoziente di $\mathbb{Q}[x, y]$ e quindi ha senso scrivere, ad esempio, $7 \in \mathbb{Q}[x, y]/I$ o $1/3 \in \mathbb{Q}[x, y]/I$ o ... Provare che $[x]_I = 1$ e $[y]_I = 0$. Come si può allora scrivere la classe $[3x^3y - 2xy^2 + 5y^3 + 2x + y + 7]_I$? Dedurre che $\mathbb{Q}[x, y]/I$ è $\mathbb{Q}$ (quindi ϕ è un isomorfismo). Che tipo di ideale è l'ideale I?