Algebra 2

Esercizi 1 - 26 settembre 2024

0. (Esercizio 0). Trovare eventuali errori in questo elenco di esercizi o nei prossimi.

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisca su G la seguente relazione:
$$g \,\mathcal{R}\, h \text{ se e solo se } gh^{-1} \in H$$
Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza (quindi provare che è riflessiva, simmetrica e transitiva).

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, ricordare che con Hg si indica l'insieme $\{hg \mid h \in H\}$. Provare che $Hg_1 = Hg_2$ se e solo se $g_1 g_2^{-1} \in H$.

3. Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo normale di G. Sia G/H l'insieme dei laterali destri di H in G, quindi gli elementi di G/H sono della forma Hg con $g \in G$. Provare che con l'operazione sugli elementi di G/H definita da $(Hg_1) \cdot (Hg_2) = H(g_1 \cdot g_2)$, l'insieme G/H diventa un gruppo.

4. Sia G un gruppo, H un sottogruppo normale di G e sia U un sottogruppo di G/H. Provare che $\pi^{-1}(U)$ è un sottogruppo di G che contiene H (dove $\pi : G \longrightarrow G/H$ è l'epimorfismo canonico).

5. Sia G un insieme finito in cui è definito un prodotto che è associativo e possiede un elemento unitario. Si supponga inoltre che per il prodotto di G valga la seguente proprietà: per ogni g, h, k, se $gh = gk$ allora $h = k$. Provare che G è un gruppo.

6. Si consideri l'insieme C_n definito da:
$$C_n = \left\{ \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \,\middle|\, \theta = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$
e in esso si consideri il prodotto dato dal prodotto di numeri complessi. Provare che C_n è un gruppo con n elementi ed è isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$ (suggerimento: si trovi un generatore di C_n).