

ALGEBRA 2
Esercizi 5 - 24 ottobre 2025

1. Sia A un anello commutativo unitario. Usando il teorema di estensione, provare che $A[x]/(x)$ è isomorfo ad A . Analogamente, provare che anche $A[x]/(x-1)$ è isomorfo ad A (con (x) e $(x-1)$ si indica ovviamente l'ideale di $A[x]$ generato, rispettivamente, da x e da $x-1$).
2. Sia A un anello commutativo unitario e siano I, J ideali di A , con $I \subseteq J$. Si definisca la legge f tale che f associa ad un elemento $[a]_I \in A/I$ l'elemento $[a]_J \in A/J$. Provare che f è ben definita come applicazione, provare che è un omomorfismo di anelli e provare che è suriettiva.
3. (**Legge del doppio quoziente**). Siano A, I, J, f come nell'esercizio precedente, quindi:

$$f : A/I \longrightarrow A/J.$$

Trovare il nucleo dell'omomorfismo f . Dedurre la legge del doppio quoziente:

$$A/I \big/ J/I \text{ è isomorfo a } A/J$$

4. Siano $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ primitivi e associati. Provare che allora $f = \pm g$.
5. Siano, f, g, h tre polinomi di $\mathbb{Z}[x]$ tali che $f = gh$ e si supponga che f sia primitivo. Provare che allora g e h sono primitivi.
6. Sia $a \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$ e a non unitario. Provare che a è irriducibile in $\mathbb{Z}$ se e solo se a è irriducibile come polinomio di $\mathbb{Z}[x]$.
7. Provare che in $\mathbb{Z}[x]$ i seguenti due ideali sono uguali:

$$(x+2, 6), \quad (x^3 - 4x + 6, x+2)$$

e provare che il primo (e quindi anche il secondo) non è un ideale principale di $\mathbb{Z}[x]$.

8. Provare che $\mathbb{Z}[x]/(3)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3[x]$.
9. Provare che l'ideale $(3, x)$ di $\mathbb{Z}[x]$ è un ideale massimale in due modi diversi. Il modo più facile: Si supponga che esista un ideale J che lo contiene propriamente, provare che $J = (1)$. Il modo più laborioso: usando la legge del doppio quoziente e l'esercizio precedente, provare che $\mathbb{Z}[x]/(3, x)$ è isomorfo al campo $\mathbb{Z}_3$.