Algebra 2

Esercizi 5 - 24 ottobre 2024

1. Siano $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Si calcoli, usando la divisione e quindi l'algoritmo di Euclide (come nel caso di numeri interi) il massimo comun divisore $d(x)$ di f e g. Si trovino poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$.

2. Si consideri l'anello dei polinomi $P = \mathbb{Z}_4[x]$. Quanti polinomi di grado n ci sono in P? Trovare poi tutti i divisori dello zero di P di grado 1.

3. Ci sono elementi di grado 1 in $\mathbb{Z}_8[x]$ che sono invertibili?

4. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio f per un polinomio g in $A[x]$ (dove A è un anello) richiede che il coefficiente direttivo di g sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$: $f = 4x + 1$, $g = 2x + 1$. Scrivere $f = qg + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(g)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di g non è invertibile).

5. Sia $f(x) = x^2 + 8x + 3 \in \mathbb{Z}_{12}[x]$. Verificare che $f(x)$ in $\mathbb{Z}_{12}$ ha i seguenti zeri: 1, 3, 7 e 9. Quindi $f(x)$ è un polinomio di grado 2 che, nell'anello $\mathbb{Z}_{12}$, ha 4 radici. Come si spiega questo fenomeno? (Ricordare che il teorema di D'Alambert dice che un polinomio, a coefficienti in un campo, ha al massimo tanti zeri quanto il grado).