Algebra 2
Esercizi 9 - 21 novembre 2025

1. Provare che l'elemento $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

2. Provare che l'elemento $\sqrt{3+\sqrt{6}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

3. Provare che l'elemento $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovare il suo polinomio minimo.

4. Provare che l'elemento $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovare il suo polinomio minimo.

5. Provare che $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{5}] = \mathrm{Q}[2\sqrt{3}-\sqrt{5}]$. Più in generale, siano $a, b \in \mathbb{Q}$ e sia $A = \mathbb{Q}[a\sqrt{3}+b\sqrt{5}]$. Per quali a e b vale: $A = \mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{5}]$?

6. Si consideri il seguente insieme $K = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e su di esso si definisca una somma nel seguente modo:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

e un prodotto:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+5\,bd, ad+bc)$$

Succede (verificarlo, se si vuole) che K, con queste due operazioni, diventa un campo. Si consideri poi l'elemento $\eta = (0,1)$. Quanto vale η^2? Come si può usare η per vedere che K è isomorfo all'anello di polinomi $\mathbb{Q}[x]$ quozientato su un polinomio irriducibile?

7. Sia $L = \mathbb{Q}(x)$ (cioè L è il campo delle frazioni di $\mathbb{Q}[x]$, quindi i sui elementi sono del tipo $f(x)/g(x)$ dove $f(x), g(x)$ sono polinomi di $\mathbb{Q}[x]$, con $g(x) \neq 0$). Chiaramente il campo L è un'estensione del campo $\mathbb{Q}$. Provare che l'elemento $x+1 \in L$ è trascendente su $\mathbb{Q}$. Più in generare, trovare quali polinomi $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \subseteq L$ sono trascendenti su $\mathbb{Q}$ (e quando sono algebrici).

8. Provare che il numero $a = \sqrt{2\,\mathrm{i}}+\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ è algebrico di grado 2 sul campo $\mathbb{Q}$ (cioè il polinomio minimo di a su $\mathbb{Q}$ è di grado 2).