

ALGEBRA 2
Esercizi 4 - 17 ottobre 2025

1. Sia A un anello (commutativo, unitario). Provare che $\mathcal{P} \subseteq A$ è un ideale primo di A se e solo se il quoziente $A/\mathcal{P}$ è un dominio d'integrità. Provare che $\mathcal{M} \subseteq A$ è massimale se e solo se $A/\mathcal{M}$ è un campo. Mostrare che ogni ideale massimale è anche primo.
2. In $\mathbb{Z}_6[x]$ trovare un polinomio di grado 1 che ha due radici (sempre in $\mathbb{Z}_6$). Trovare un polinomio di grado 2, monico, che ha tre radici in $\mathbb{Z}_6$. (Quindi questi esempi mostrano che il teorema di d'Alambert non vale se i coefficienti non sono in un dominio).
3. In un dominio d'integrità A un elemento q si dice irriducibile se non è nullo, non è invertibile e se ha, per unici divisori, gli elementi invertibili e gli elementi associati a q (associato a q significa che è della forma $u \cdot q$ dove u è un elemento invertibile). Dato un elemento $q \in A$ non nullo e non unitario, provare che q è irriducibile se e solo se vale la condizione:

Se $q = ab$, allora a è unitario o b è unitario.

4. Sia A un anello commutativo, unitario. Provare che esiste un unico omomorfismo di anelli $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$.
5. Si consideri un triangolo equilatero in cui i vertici sono denominati con 1, 2, 3 (in senso orario). Una rotazione in senso orario di 120° del triangolo equilatero attorno al suo baricentro porta il vertice 1 nel vertice 2, il vertice 2 nel vertice 3 e il vertice 3 nel vertice 1, quindi può essere codificata con il ciclo $\sigma = (1, 2, 3)$. la riflessione del triangolo attorno alla mediana che passa per il vertice 1 può essere codificata con il ciclo (scambio) $\tau = (2, 3)$. Esprimere tutte le simmetrie del triangolo (cioè i movimenti rigidi che mandano il triangolo in sé) come composizioni di σ e τ . Verificare che si ottengono 6 movimenti diversi. In questo modo si è provato che il gruppo diedrale D_3 è generato da σ e τ . Sia ora G un gruppo di ordine 6. Sia x un elemento di G di ordine 2 e y un elemento di G di ordine 3 (perché esistono?). Provare che gli elementi $1, y, y^2, x, xy, xy^2$ sono tutti distinti tra loro (e quindi sono gli elementi di G). Provare che G o è il gruppo diedrale descritto sopra o è il gruppo ciclico con 6 elementi (quindi isomorfo a $\mathbb{Z}_6$).
6. Ripetendo passo passo la dimostrazione del teorema cinese dei resti, trovare le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \text{mod } 2 \\ x \equiv 2 & \text{mod } 3 \\ x \equiv 4 & \text{mod } 5 \end{cases}$$

7. Sia A un anello finito. Provare che se A è un dominio d'integrità, allora A è un campo.

8. Sia A un anello finito. Provare che gli elementi di A o sono invertibili o sono divisori dello zero. Dare l'esempio di un anello in cui un elemento non è invertibile e non è divisore dello zero.
9. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio f per un polinomio g in $A[x]$ (dove A è un anello) richiede che il coefficiente direttivo di g sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$: $f = 4x + 1$, $g = 2x + 1$. Scrivere $f = qg + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(g)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di g non è invertibile).