ALGEBRA 2
Esercizi 4 - 17 ottobre 2024

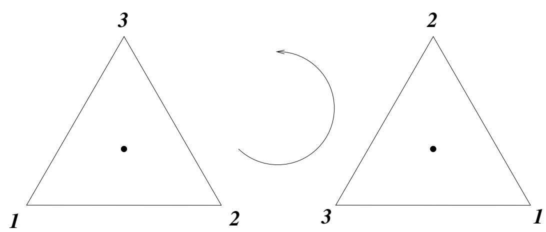
1. In S_4 si considerino i seguenti elementi:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Trovare l'ordine di g e di h. Siano G e H i sottogruppi di S_4 generati da g e h. Spiegare perché G e H sono 3-gruppi di Sylow. Come tali, devono essere coniugati. Trovare allora $\sigma \in S_4$ tale che $G = \sigma H \sigma^{-1}$.

2. Siano G ed H due gruppi e sia $T = G \times H$ il gruppo prodotto. Si supponga che $g \in G$ abbia ordine m e $h \in H$ abbia ordine n (con $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$). Trovare l'ordine dell'elemento $(g, h) \in T$.

3. Si consideri un triangolo equilatero e siano $1, 2, 3$ i suoi tre vertici, come nella seguente figura:



   La rotazione di 120^o in senso antiorario attorno al baricentro comporta che il vertice 1 vada al posto del vertice 2, il vertice 2 vada al posto del vertice 3 e il vertice 3 vada al posto del vertice 1; tale rotazione si può quindi indicare con la permutazione: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. In questo modo si possono codificare tutte le simmetrie del triangolo equilatero (che formano un gruppo, perché due simmetrie si possono comporre ottenendo un'altra simmetria). Elencare tutte le simmetrie del triangolo equilatero. Che gruppo si è ottenuto?

4. Si consideri ora un quadrato e le sue simmetrie (sono date da rotazioni di multipli di 90^o e da riflessioni). Anche in questo caso si ottiene un gruppo di permutazioni, questa volta contenuto in S_4. Verificare che il gruppo ottenuto ha 8 elementi. Provare che ogni elemento del gruppo si può ottenere da una rotazione di 90^o e da una riflessione. Verificare che il gruppo ha 8 elementi e che non è un gruppo ciclico.
   Il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di n lati si chiama gruppo diedrale D_n e risulta essere un gruppo con $2n$ elementi. Nell'esercizio precedente quindi si è introdotto il gruppo diedrale D_3, in questo esercizio il gruppo D_4.

5. Sia G un gruppo di 91 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G.