Algebra 2

Esercizi 8 - 14 novembre 2025

1. Sia $F : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli dato da $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $F(x) = \sqrt{2}$ e poi esteso su tutto $\mathbb{Q}[x]$ nell'unico modo possibile. Trovare il nucleo di F.

2. Sia $f \in K[x]$ un polinomio irriducibile. Provare che è anche irriducibile nell'anello dei polinomi $K[x, y]$.

3. Provare che l'ideale $(x - 3, y - x) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è un ideale massimale.

4. Sia $I = (x^2, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Trovare tutti gli ideali primi di $\mathbb{Q}[x, y]$ che contengono I.

5. Provare che l'ideale $I = \big(x^2 + 4, y - 2\big) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è massimale. Si pensi poi lo stesso ideale in $\mathbb{C}[x, y]$. Trovare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{C}[x, y]$ che lo contengono.

6. Si consideri l'ideale $I = \big(x^2 - 1, y(x + 2)\big)$ (come ideale di $\mathbb{Q}[x, y]$). Trovare tutti gli ideali primi di $\mathbb{Q}[x, y]$ che contengono I.

7. Provare che l'ideale (x, y^2) non è un ideale principale di $\mathbb{Q}[x, y]$.

8. Sia $F : \mathbb{Q}[x, y] \longrightarrow \mathbb{Q}[z]$ data da: $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$, $F(x) = z^2$, $F(y) = z + 1$ (e poi estesa al solito modo). Trovare $\ker F$.